**ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය**
**විද්‍යාවේදී/අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව**
**අවසන් පරීක්ෂණය - 2017/2018**
**ව්‍යවහාරික ගණිතය-තුන්වන මට්ටම**
**ADU3302/APU1142/ADE3302- අවකල සමීකරණ**
**කාලය: පැය 2 යි.**

දිනය: 26. 03. 2019 වේලාව- පෙ.ව 9.30-පෙ.ව 11.30

<u>අපේක්ෂකයන් සඳහා උපදෙස්</u>

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය A කොටස සහ B කොටස ලෙස කොටස් **දෙකකින්** යුක්ත වේ. A කොටස අනිවාර්ය වන අතර එහි ව්‍යුහගත රචනා ප්‍රශ්න **හයක්** ඇත. දී ඇති ඉඩෙහි මෙම කොටසට පිළිතුරු ලියන්න.
- B කොටස රචනා ප්‍රශ්න **පහකින්** සමන්විත වන අතර **තුනකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
- A කොටසෙහි සහ B කොටසෙහි සියලු ප්‍රශ්න වලට ලකුණු 100 බැගින් හිමිවේ.
- A කොටසෙහි සියලු පිටුවල ඔබගේ විභාග අංකය ලියන්න.
- විභාගය අවසානයේදී A කොටස උත්තර පත්‍රයට අමුණා ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.

'50

00150

A කොටස

1. ප්‍රශ්න සියල්ලටම පිළිතුරු දී ඇති ඉඩෙහි ලියන්න.

a) Show that $\phi(x) = 3e^x$ is a solution of the differential equation $y'' - 5y' + 4y = 0$.
$\phi(x) = 3e^x$ යනු $y'' - 5y' + 4y = 0$ අවකල සමීකරණයෙහි විසඳුමක් බව පෙන්වන්න.

b) Solve the initial value problem $y' = 2x + \cos x, y(0) = 1$.
$y' = 2x + \cos x, y(0) = 1$ වන මූලික අගය ඇති ගැටළුව විසඳන්න.

c) Using a suitable substitution, solve $y' = (x + y)^2$.
සුදුසු ආදේශකයක් භාවිතා කර $y' = (x + y)^2$ විසඳන්න.

d) Find $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ such that $F = x^{\alpha} y^{\beta}$ is an integrating factor to the equation $y(2-3xy)dx - xdy = 0$.
$F = x^{\alpha} y^{\beta}$ යන්න $y(2-3xy)dx - xdy = 0$ සමීකරණයේ අනුකල සාධකයක් වන පරිදි $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ සොයන්න.

e) Find the $UC$ set of the function $f(x) = xe^{3x} \sin(3x+2)$.
$f(x) = xe^{3x} \sin(3x+2)$ යන ශ්‍රිතයේ $UC$ කුලය සොයන්න.

f) Show that $x = 0$ is a regular singular point of the differential equation $2x^2 y'' + 3xy' - (1+x)y = 0$.
$x = 0$ යනු $2x^2 y'' + 3xy' - (1+x)y = 0$ අවකල සමීකරණයෙහි අපූර්ව ලක්‍ෂයක් බව පෙන්වන්න.

**B කොටස**

**ප්‍රශ්න තුනකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.**

2.

(a) සුදුසු ආදේශයක් භාවිතා කර $(2x+3y+5)dx-(3x+2y-6)dy=0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(b) $y'+\left(\frac{1}{x}\right)^k y=\sin^k x, x\neq 0$ ලෙස ගනිමු. මෙම අවකල සමීකරණය

(i) $k=0$

(ii) $k=1$

සඳහා විසඳන්න.

3.

(a) $3x^2ydx+4x^3dy=0$ යන අවකල සමීකරණය සපිරි නොවන බව පෙන්වන්න.

(b) $M_1dx+N_1dy=0$ සහ $M_2dx+N_2dy=0$ යන අවකල සමීකරණ සපිරි බව දී ඇති විට $(M_1+M_2)dx+(N_1+N_2)dy=0$ යන අවකල සමීකරණයද සපිරි බව පෙන්වන්න.

(c) $(4x^3y^3+3x^2)dy+(3x^4y^2+6y^2)dy=0$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

4.

(a) $y_1=e^x$ සහ $y_2=xe^x$ යන ශ්‍රිත $y''-2y'+y=0$ අවකල සමීකරණයේ විසඳුම් බව පෙන්වන්න. තවද $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ වන පරිදි $y=c_1y_1+c_2y_2$ ශ්‍රිතයද ඉහත සමීකරණයේ විසඳුමක් බව පෙන්වන්න.

(b) $y''-4y'+4y=3e^{2x}$ හි සාමාන්‍ය විසඳුම සොයන්න.

(c) $ay''+by'+cy=0$ හි ලාක්ෂණික සමීකරණයට පුනරාවර්ත සෘණ තාත්වික මූල හෝ සෘණමය තාත්වික කොටස් ඇති මූල දෙකක් ඇති විට, එහි සියලුම විසඳුම් $x\to\infty$ වන විට ශුන්‍යයට (Zero) ළඟාවන බව පෙන්වන්න.

5.

(a) අවකල සමීකරණය $y''-2xy'+4y=0$ ලෙස ගනිමු.

(i) $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ භාවිතා කර $\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2\sum_{n=0}^{\infty}(n-2)a_nx^n=0$ බව පෙන්වන්න.

(ii) තවද $n(n-1)a_n-2(n-4)a_{n-2}=0$ සියලුම $n\geq 2$, සඳහා පෙන්වන්න.

(b) එක්තරා කෘමි සංගණනයක ගතිකමය වර්ධනය $U_t-5U_{t-1}+6U_{t-2}=0$ අන්තර සමීකරණය මගින් ආකෘති ගත කල හැකි අතර, $U_1=28$ සහ $U_2=74$ වේ. ඉහත සමීකරණය විසඳා **එනයින්** $t=5$ වන විට කෘමින් සංගණනයේ ප්‍රමාණය සොයන්න.

6.

(a) එක්තරා විශේෂයක සංගණනය $P=P(t)$, $P'=aP(1-kP)$ මගින් ප්‍රකාශ කරන අතර, $P(0)=20$ වේ. $t>0$, වන විට $P$ සොයා තවදුරටත් සංගණනයේ ප්‍රමාණය දීර්ඝ කාලයකදී $1/k$ ට සීමා වන බව පෙන්වන්න.

(b) එක්තරා පුද්ගලයෙක් ඉතිරිකිරීම් ගිණුමක් රු: 1000/= කින් ආරම්භ කර ඉක්බිති සෑම සතියකදීම රු: 50/= ක් තැන්පත් කරනු ලැබේ. බැංකුව විසින් 6% පොළී අනුපාතිකයක් ගෙවීමට එකඟ වී ඇත. වසරකට එවැනි තැන්පතු 52 ක් සිදුවන බැවින්, තැන්පතු වසරකට රු: 2600/= ක් බැගින් සන්තතිකව සිදුවන බව උපකල්පනය කරමු. මෙම උපකල්පනය මත පිහිටමින්, ගිණුමේ $t>0$ වන විට ඇති මුදල $Q(t)$, සන්තතිකව වර්ධනය වීම $Q'=2600+0.06Q$ මගින් දෙනු ලැබේ.

$t>0$ වන විට ඇති මුදලේ ප්‍රමාණය $Q(t)$ සොයන්න.

----නිමි----

00150

The Open University of Sri Lanka
B.Sc/B.Ed. Degree Programme
Final Examination- 2017/2018
Applied Mathematics - Level 03
ADU3302/APU1142/ADE3302 DIFFERENTIAL EQUATIONS

Duration: Two Hours

---

**Date: 26.03.2019** **Time: 09.30 am - 11.30 am**

---

INSTRUCTIONS TO CANDIDATES

- This paper consists of **TWO** Sections, Section A and Section B. Section A is compulsory and it consists of **SIX** Structured Essay Questions. You should answer in the space priovided under each question.
- Section B consists of **FIVE** essay type questions and answer only **THREE** of them. Each question in Section A and Section B carries 100 marks.
- Write you index number in each page of Section A.
- At the end of the exam, attach Section A to the answer booklet and hand over to the supervisor.

d) Find $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ such that $F = x^{\alpha} y^{\beta}$ is an integrating factor to the equation
$y(2-3xy)dx - xdy = 0$.
$F = x^{\alpha} y^{\beta}$ යන්න $y(2-3xy)dx - xdy = 0$ සමීකරණයේ අනුකල සාධකයක් වන පරිදි $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ සොයන්න.

e) Find the $UC$ set of the function $f(x) = xe^{3x}\sin(3x+2)$.
$f(x) = xe^{3x}\sin(3x+2)$ යන ශ්‍රිතයේ $UC$ කුලය සොයන්න.

f) Show that $x = 0$ is a regular singular point of the differential equation
$2x^2y'' + 3xy' - (1+x)y = 0$.
$x = 0$ යනු $2x^2y'' + 3xy' - (1+x)y = 0$ අවකල සම්කරණයෙහි අපූර්ව ලක්ෂ්‍යයක් බව පෙන්වන්න.

## SECTION B

Answer **THREE** Questions **ONLY**.

2. (a) Using a suitable substitution, solve the equation $(2x+3y+5)dx-(3x+2y-6)dy = 0$.

   (b) Let $y' + \left(\frac{1}{x}\right)^k y = \sin^k x,\ x \neq 0$. Solve this differential equation when
   (i) $k = 0$,

   (ii) $k = 1$.

3. (a) Show that the differential equation $3x^2ydx + 4x^3dy = 0$ is not exact.

   (b) If the differential equations $M_1dx + N_1dy = 0$ and $M_2dx + N_2dy = 0$ are exact then show that the equation $(M_1 + M_2)dx + (N_1 + N_2)dy = 0$ is also exact.

   (c) Solve the differential equation
   $(4x^3y^3 + 3x^2)dy + (3x^4y^2 + 6y^2)dy = 0$.

4. (a) Show that the functions $y_1 = e^x$ and $y_2 = xe^x$ are solutions of the differential equation $y'' - 2y' + y = 0$. Verify that if $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ then $y = c_1y_1 + c_2y_2$ is also a solution of the above differential equation.

   (b) Find the general solution of $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$.

   (c) Prove that if the characteristic equation of $ay'' + by' + cy = 0$ has either a repeated negative real root or two roots with negative real parts, then every solution of the equation above approaches to zero as $x \to \infty$.

5. (a) Consider the differential equation $y'' - 2xy' + 4y = 0$.
   (i) Using $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ show that

   $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(n-2)a_nx^n = 0$.

   (ii) Also show that $n(n-1)a_n - 2(n-4)a_{n-2} = 0$, for each $n \geq 2$.

   (b) The dynamic of the growth of a certain insect population $U_t$ is modelled by the difference equation $U_t - 5U_{t-1} + 6U_{t-2} = 0$, where $U_1 = 28$ and $U_2 = 74$. Solve the above difference equation and **hence** find the size of the population when $t = 5$.

6. (a) The population $P = P(t)$ of a species satisfies the logistic equation $P' = aP(1-kP)$ and $P(0) = 20$. Find $P$ for $t > 0$ and show that the size of the population limits to $1/k$ in the long run.

(b) A person opens a saving account with an initial deposit of Rs. 1000 and subsequently deposits Rs. 50 per week. The interest rate which the bank agrees to pay is 6% compounded continuously. Since there are 52 discrete deposits per year of Rs. 50 each, we assume that the deposits are made continuously at a rate of Rs. 2600 per year. With this assumption, the amount in the account at time $t > 0$, $Q(t)$, increases continuously at the rate

$$Q' = 2600 + 0.06Q.$$

Find the amount $Q(t)$ in the account at time $t > 0$.

—-End—-

00055

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
விஞ்ஞானமாணி/ கல்விமாணி பட்டப்பாடநெறி
இறுதிப் பரீட்சை - 2017/2018
பிரயோக கணிதம் - மட்டம் 03
ADU3302/APU1142/ADE3302– வகையீட்டு சமன்பாடுகள்

காலம்: - இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

திகதி : 26.03.2019 நேரம்: மு.ப 09:30 – மு.ப 11:30

<u>பரீட்சார்த்திகளுக்கான அறிவுறுத்தல்கள்</u>

- இவ் வினாப்பத்திரமானது பகுதி A மற்றும் பகுதி B என **இரண்டு** பகுதிகளைக் கொண்டுள்ளது. பகுதி A கட்டாயமானது மற்றும் இது **ஆறு** கட்டமைக்கப்பட்ட கட்டுரை வினாக்களைக் கொண்டுள்ளது.
- பகுதி B யானது **ஐந்து** கட்டுரை வகையான வினாக்களைக் கொண்டுள்ளது அவற்றில் **மூன்று** வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்கவும். பகுதி A மற்றும் பகுதி B என்பனவற்றிலுள்ள ஒவ்வொரு வினாவுக்குமான புள்ளிகள் 100 ஆகும்.
- உங்களுடைய சுட்டெண்ணை பகுதி A இன் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் எழுதுக.
- பரீட்சையின் முடிவில் பகுதி A இனை உங்கள் விடை புத்தகத்துடன் இணைத்து மேற்பார்வையாளரிடம் ஒப்படைக்கவும்

## SECTION A
## பகுதி A

**1. Answer all the questions in the space provided.**

**1.** அனைத்து வினாக்களுக்கும் ஒதுக்கப்பட்டுள்ள இடங்களில் விடையளிக்குக.

(a) Show that $\phi(x) = 3e^x$ is a solution of the differential equation $y'' - 5y' + 4y = 0$.

(a) $\phi(x) = 3e^x$ என்பது $y'' - 5y' + 4y = 0$ என்னும் வகையீட்டு சமன்பாட்டின் தீர்வொன்றாகும் எனக் காட்டுக.

(b) Solve the initial value problem $y' = 2x + \cos x,\ y(0) = 1$.

(b) $y' = 2x + \cos x,\ y(0) = 1$ என்னும் தொடக்க பெருமதி உத்திகணக்கினைத் தீர்க்க.

(c) Using a suitable substitution, solve $y' = (x + y)^2$.

(c) பொருத்தமான பிரதியீடு ஒன்றினை பயன்படுத்தி, $y' = (x + y)^2$ இனைத் தீர்க்க.

(d) Find $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ such that $F = x^{\alpha} y^{\beta}$ is an integrating factor to the equation
$y(2-3xy)dx - xdy = 0$.

(d) $F = x^{\alpha} y^{\beta}$ என்பது $y(2-3xy)dx - xdy = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு தொகையீட்டு காரணி ஆகுமாறுள்ள $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ என்பவற்றினைக் காண்க.

(e) Find the UC set of the function $f(x) = xe^{3x} \sin(3x+2)$.

(e) $f(x) = xe^{3x} \sin(3x+2)$ என்னும் சார்பின் UC தொடையினைக் காண்க.

(f) Show that $x = 0$ is a regular singular point of the differential equation
$2x^2 y'' + 3xy' - (1+x)y = 0$.

(f) $2x^2 y'' + 3xy' - (1+x)y = 0$ என்னும் வகையீட்டு சமன்பாட்டில் $x = 0$ என்பது ஒரு ஒழுங்கான தனிச்சிறப்புப்புள்ளி எனக் காட்டுக.

பகுதி **B**

மூன்று வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

2. (a) பொருத்தமான பிரதியீடு ஒன்றினைப் பயன்படுத்தி, $(2x+3y+5)dx-(3x+2y-6)dy=0$ என்னும் சமன்பாட்டினைத் தீர்க்க.

   (b) $y'+\left(\frac{1}{x}\right)^{k} y=\sin^{k} x,\ x\neq 0$ என்க.

   (i) $k=0$,

   (ii) $k=1$

   என ஆகும் போது வகையீட்டு சமன்பாட்டினைத் தீர்க்க.

3. (a) $3x^2ydx+4x^3dy=0$ என்னும் வகையீட்டு சமன்பாடானது செப்பமற்றது எனக் காட்டுக.

   (b) $M_1dx+N_1dy=0$ மற்றும் $M_2dx+N_2dy=0$ என்னும் வகையீட்டு சமன்பாடுகள் செப்பமானவைகளாயின் $(M_1+M_2)dx+(N_1+N_2)dy=0$ என்னும் சமன்பாடும் செப்பமானது எனக் காட்டுக.

   (c) $(4x^3y^3+3x^2)dy+(3x^4y^2+6y^2)dy=0$ என்னும் வகையீட்டு சமன்பாட்டினைத் தீர்க்க.

4. (a) $y_1=e^x$ மற்றும் $y_2=xe^x$ என்னும் சார்புகள் $y''-2y'+y=0$ என்னும் வகையீட்டு சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும் எனக் காட்டுக. $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ எனின் $y=c_1y_1+c_2y_2$ என்பதும் மேற்காணும் வகையீட்டு சமன்பாட்டின் தீர்வொன்றாகும் என்பதை வாய்ப்புப்பார்க்க.

   (b) $y''-4y'+4y=3e^{2x}$ இன் பொது தீர்வைக் காண்க.

   (c) $ay''+by'+cy=0$ இன் சிறப்பியல்பு சமன்பாடானது மீழும் மறை மெய் மூலமொன்றை அல்லது மறை மெய் பகுதிகளைக் கொண்ட இரண்டு மூலங்களினைக் கொண்டிருப்பின் $\lim x\to\infty$ ஆகும் போது சமன்பாட்டின் ஒவ்வொரு தீர்வும் பூச்சியத்தை அணுகும் என நிறுவுக.

5. (a) $y''-2xy'+4y=0$ என்பது வகையீட்டு சமன்பாடு எனக் கொள்க.

   (i) $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ இனை உபயோகித்து $\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2\sum_{n=0}^{\infty}(n-2)a_nx^n=0$ எனக் காட்டுக.

   (ii) ஒவ்வொரு $n\geq 2$ இற்கும், $n(n-1)a_n-2(n-4)a_{n-2}=0$ எனவும் காட்டுக.

   (b) குறிப்பிட்ட பூச்சி குடித்தொகை $U_t$ ஒன்றின் வளர்ச்சி இயக்கத்தின் வித்தியாச சமன்பாடானது $U_t-5U_{t-1}+6U_{t-2}=0$ என மாதிரியாக்கப்பட்டுள்ளது, இங்கு $U_1=28$ மற்றும் $U_2=74$ ஆகும். மேற்காணும் வித்தியாச சமன்பாட்டின்னைத் தீர்த்து **இதிலிருந்து** $t=5$ ஆகும் போது குடித்தொகையின் அளவினைக் காண்க.

6. (a) ஒரு இனத்தின் குடித்தொகை $P = P(t)$ ஆனது $P' = aP(1-kP)$ மற்றும் $P(0) = 20$ என்னும் அளக்கைச் சமன்பாட்டைத் திருப்திப்படுத்துகின்றது. $t > 0$ இற்கான $P$ இணைக் காண்க மற்றும் குடித்தொகையின் அளவானது நீண்டகாலத்துக்கு $\frac{1}{k}$ என மட்டுப்படுத்தப்பட்டுள்ளது எனக் காட்டுக.

(b) நபர் ஒருவர் ஆரம்ப வைப்பாக ரூ1000 உடன் தொடர்வைப்பாக ரூ50 இணை வாரமொன்றுக்கு வைப்பிலிடுமாறு சேமிப்பு கணக்கொன்றை திறக்கின்றார். வங்கியினால் ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்ட தொடர்ச்சியான கூட்டு வட்டி வீதமானது 6% ஆகும். வருடமொன்றிற்கு ரூ50 படியான 52 பின்னகமான வைப்புக்கள் உள்ளபடியால் வருடமொன்றிற்கு ரூ2600 என்னும் வீதமொன்றில் தொடர்ச்சியாக வைப்புகள் இடம்பெற்றுள்ளன என நாங்கள் எடுத்துக்கொள்வோம். இந்த எடுகோளுடன், நேரம் $t > 0$ இல் கணக்கில் உள்ள தொகை, $Q(t)$, ஆனது

$Q' = 2600 + 0.06Q$ என்னும் வீதத்தில் தொடர்ச்சியாக அதிகரிக்கின்றது.

$t > 0$ இல் கணக்கில் உள்ள தொகை $Q(t)$ இணைக் காண்க.