ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය

ඉංජිනේරු තාක්ෂණ ඩිප්ලෝමා (පදනම්) පාඨමාලාව - මට්ටම 02

අවසාන පරීක්ෂණය 2011/2012

ශුද්ධ ගණිතය - MPZ 2310 – II

කාලය - පැය 03 යි.

දිනය - 2012.02.23 **වේලාව - පෙ.ව. 09.30 - 12.30 දක්වා**

ප්‍රශ්න 06 කට පිළිතුරු සපයන්න.

Non programmable ගණක යන්ත්‍ර භාවිතා කළ හැක. ගණක යන්ත්‍ර සඳහා ජංගම දුරකථන භාවිතා කිරීමට ඉඩ දෙනු නොලැබේ.

01. (a) $x^2+y^2 = 13$ සහ $xy = 6$, $x>y>0$ නම් $(x+y)^2$ සහ $(x-y)^2$ හි අගයන් සොයන්න. එනයින් x හා y හි අගයන් සොයන්න.

(b) $f(x) = x^2 + 2(\lambda+1)x + (\lambda^2-1)$;

(i) x හි සියළුම තාත්වික අගයන්ට $f(x)$ ධනවීම සඳහා λ හි අගයන් සොයන්න.

(ii) $f(x) = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β නම්, α, β තාත්වික වීම සඳහා λ ට ගත හැකි අගය කුලකය සොයන්න.

(c) $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ යන්න සැළකීමෙන්

(i) $\log_p q . \log_q p = 1$ (ii) $\log_p q . \log_q r . \log_r p = 1$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\frac{1}{\log_{503}2012} + \frac{1}{\log_4 2012}$ හි අගය සොයන්න.

02. (a) n ධන නිඛිල සඳහා $2^{3n}-1$, 7 න් බෙදෙන බව ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් සාධනය කරන්න.

(b) $\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ භින්න භාගවලින් ප්‍රකාශ කරන්න.

එනයින් $\frac{1}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + \frac{3}{4.5.6} + \dots\dots\dots + \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ ශ්‍රේණියේ පද n හි ඓක්‍යය සොයන්න.

(c) $|x^2-4| > 5$ අසමානතාව විසඳන්න.

03. (a) i. "OPEN UNIVERSITY " යන වචනවල වරකට සියළුම අකුරු ගෙන කළ හැකි පිළියෙල කිරීම් ගණන සොයන්න.

ii. " OPEN UNIVERSITY"යන වචනයේ වරකට අක්ෂර හතරක් ගෙන ලබා ගත හැකි වෙනස් කාන්ඩ (සංයෝජන) ගණන සොයන්න.

(b) $\left\{ax^2 + \frac{1}{bx}\right\}^{11}$ ප්‍රසාරණයේ x^7 සංගුණකය හා $\left\{ax - \frac{1}{bx^2}\right\}^{11}$ ප්‍රසාරණයේ x^{-7} සංගුණකය සමාන වේ. a හා b අතර සම්බන්ධතාව සොයන්න.

(c) සාධක ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ බහුපදයේ එක් සාධකයක් සොයන්න. එනයින් f (x) සියළුම ඒකජ සාධක සොයන්න.

04. (a) පහත සමීකරණ තෘප්ත කරන Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

$$\left|\frac{z-12}{z-8j}\right| = \frac{5}{3}, \qquad \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$$

(b) $\frac{3+2j\,Sin\theta}{1-2j\,Sin\theta}$ සංඛ්‍යාව (i) තාත්වික (ii) අතාත්වික වන යේ θ හි අගයන් සොයන්න.

(c) මේ සමීකරණ පද්ධතිය විසඳන්න.

$$x - y + 2z = 9$$
$$x + y + 5z = 25$$
$$x + y + z = 9$$

05. (a) $A \equiv (4,5)$, $B \equiv (-4,3)$, $C \equiv (-1,-3)$ වේ.

ABC ත්‍රිකෝණයේ පාදවල සමීකරණ සොයන්න.

මූල ලක්ෂයය, ABC ත්‍රිකෝණය තුළ පිහිටන බව පෙන්වන්න.

(b) $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$ වෘත්තයට $3x + y - 1 = 0$ රේඛාව ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න. ස්පර්ශ ලක්ෂයයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

06. (a) $S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ හා $S' \equiv x^2 + y^2 + 10y + 20 = 0$
වෘත්ත දෙක බාහිරව ස්පර්ශ කරන බව සාධනය කරන්න.
ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක හා පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න.

(b) PQRS සමාන්තරාස්‍රයේ PQ හා QR පාදවල සමීකරණ පිළිවෙලින් $3x - y + 7 = 0$ හා $x - 3y + 5 = 0$ වේ. PS පාදය (-8,3) ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරන අතර, RS පාදය (5,2) හරහා ගමන් කරයි. S ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

07. (a) පහත සීමා අගයන්න.

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{1-Cosx}{xSinx}$ (ii) $\lim_{x \to 6} \frac{x^3-216}{x-6}$

(iii) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{4x^3} + 7x + 2x\right)$

(b) $\frac{Sec\,x+Tan\,x}{Sec\,x-Tan\,x}$ x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

$Y = e^{4x} Sin\,3x$ නම් $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{8dy}{dx} + 25y = 0$ බව පෙන්වන්න.

(c) විවෘත පෙට්ටියක උඩ හා යට අන්ත දෙක සමචතුරස්‍රාකාර වේ. පෙට්ටියේ පරිමාව $216\ m^3$ වේ. පෙට්ටිය නිෂ්පාදනයේ දී පතුල සඳහා වියදම වර්ග මීටරයට රුපියල් 1500 ක් වේ. පෙට්ටියේ පැති සඳහා නිෂ්පාදන වියදම වර්ග මීටරයට රුපියල් 750 කි. වඩාත්ම ලාභදායී වන මිනුම් සොයන්න.

08. (a) මෙම අනුකලන අගයන්න.

$(i) \int \frac{dx}{16x^2+25}$ $ii. \int \frac{dx}{Sinx-Cosx}$ $iii. \int \frac{1-Sinx}{1+Sinx}\,dx$

(b) මේ නිශ්චිත අනුකලන අගයන්න.

(i) $\int_{2}^{3} \frac{2x\,dx}{(1+x)(1+x^2)}$ (ii) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{3Cosx + 4Sinx}{3Sin\,x + 4Cos\,x + 5}\,dx$

(c) $y = 64 - x^2$ වක්‍රය x අක්ෂය සමග ඇවිරෙන වර්ගඵලය සොයන්න.

09. (a) මේ සමීකරණ විසඳන්න.

(i) $\text{Cos}\,x - \text{Cos}3x = \text{Sin}4x - \text{Sin}2x$

(ii) $\sqrt{3}Cos\,2x - Sin\,2x = 1$

(b) සයින් නිතිය හා කෝසයින් නිතිය භාවිතයෙන්

$\frac{b+c}{11} = \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13}$ නම්

(i) $\frac{Sin\,A}{7} = \frac{Sin\,B}{6} = \frac{Sin\,C}{5}$ සහ

(ii) $\frac{Cos\,A}{7} = \frac{Cos\,B}{19} = \frac{Cos\,C}{25}$ බව පෙන්වන්න.

THE OPEN UNIVERSITY OF SRI LANKA
DIPLOMA IN TECHNOLOGY – (FOUNDATION PROGRAMME)
FINAL EXAMINATION – 2011/2012
MPZ 2310 – PURE MATHEMATICS – II
DURATION – THREE (03) HOURS

DATE : 23rd February 2012 **TIME: 09.30 a.m. – 12.30 p.m.**

Answer six (06) questions only. You can use non programmable calculators.

01. a. If $x^2 + y^2 = 13$ and $xy = 6$, $x > y > 0$

Find the values for $(x+y)^2$ and $(x-y)^2$. Hence find the values for x and y.

b. Let $f(x) = x^2 + 2(\lambda+1)x + (\lambda^2 - 1)$;

i. Find the values of λ such that *f(x)* is positive for all real value of x.

ii. α, β are the roots of the equation *f(x)=0* Find the set of values of λ such that α *and* β are real.

c. By considering $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, Show that

i. $\log_p q \log_q p = 1$

ii. $\log_p q \log_q r \log_r p = 1$

iii. find the value of $\dfrac{1}{\log_{503} 2012} + \dfrac{1}{\log_4 2012}$

02. a. Using the principle of mathematical induction show that, for each positive integer n, $2^{3n}-1$ is divisible by 7.

b. Find the partial fractions of $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$. Hence find the sum of the n terms of the series $\dfrac{1}{2.3.4}+\dfrac{2}{3.4.5}+\dfrac{3}{4.5.6}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\dfrac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

c. Find the solution of the inequality of $\left|x^2-4\right|>5$.

03. a. i. How many arrangements can be formed out of the letters of the words "OPEN UNIVERSITY" be arranged when all are taken at a time.

ii. Find the number of combinations that can be made from the letters of the words "OPEN UNIVERSITY" taking four at a time.

b. Find the relation between a and b, so that the coefficient of x^7 in

$$\left\{ax^2+\frac{1}{bx}\right\}^{11} \; and \; x^{-7} \; in \left\{ax-\frac{1}{bx^2}\right\}^{11}$$ are equal.

c. Use the factor theorem to find one of the factors of the polynomial $f(x)=2x^3-9x^2+7x+6$. Hence factorize $f(x)$ in to its linear factors.

04. a. Find the complex number z satisfying the equations $\left|\dfrac{z-12}{z-8j}\right|=\dfrac{5}{3}$, $\left|\dfrac{z-4}{z-8}\right|=1$

b. Find the θ value such that $\dfrac{3+2jSin\theta}{1-2jSin\theta}$ is i. real ii. Imaginary

c. Solve the following system equations.

$$x-y+2z=9$$
$$x+y+5z=25$$
$$x+y+z=9$$

05. a. Let $A \equiv (4,5)$, $B \equiv (-4,3)$, $C \equiv (-1,-3)$ find the equations of the sides of the triangle ABC. Prove that the origin lies inside the triangle ABC.

b. Show that the line $3x + y - 1 = 0$ touches the circle $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$ and find the coordinates of the point of contact.

06. a. Show that the circles $S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$, *and* $S' \equiv x^2 + y^2 + 10y + 20 = 0$ touches each other externally, and find the coordinate of the contact point of the two circles. Find the equation of the common tangent.

b. PQRS is a parallelogram having equations of PQ,QR as $3x - y + 7 = 0$ and $x - 3y + 5 = 0$ respectively. If PS passes through the point (-8,3) and RS passes through the point (5,2) then find the coordinates of S.

07. a. Evaluate the following limits.

i. $x \xrightarrow{lt} 0, \dfrac{1 - \cos x}{x \sin x}$ ii. $x \xrightarrow{lt} 6, \dfrac{x^3 - 216}{x - 6}$

iii. $x \xrightarrow{lt} \infty; \left(\sqrt{4x^3 + 7x} + 2x\right)$

b. Differentiate $\dfrac{Secx + Tanx}{Secx - Tanx}$ with respect to x.

If $y = e^{4x} Sin3x$ show that $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 8\dfrac{dy}{dx} + 25y = 0$

c. An open rectangular box with top and bottom square ends and a volume of 216 m^3 is to be build at a cost of Rs. 1500 per square meter for the base and Rs. 750 per square meter for the sides. Find the most economical dimensions.

08. a. Evaluate the following integrals.

i. $\int \frac{dx}{16x^2+25}$ ii. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$ iii. $\int \frac{1-\sin x}{1+\sin x}dx$

b. Evaluate the following define integrals.

i. $\int_2^3 \frac{2xdx}{(1+x)(1+x^2)}$ ii. $\int_0^{\pi/2} \frac{3\cos x + 4\sin x}{3\sin x + 4\cos x + 5}dx$

c. Find the area bounded by the curve $y = 64 - x^2$ *and* x *axis*

09. a. Solve the following equations.

i. $Cosx - cos3x = \sin 4x - \sin 2x$

ii. $\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = 1$

b. By using sine law and cosine law,

If $\frac{b+c}{11} = \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13}$

Then prove that

i. $\frac{SinA}{7} = \frac{SinB}{6} = \frac{SinC}{5}$ and

ii. $\frac{CosA}{7} = \frac{CosB}{19} = \frac{CosC}{25}$

- Copyrights reserved -

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
தொழில்நுட்பவியல் டிப்ளோமா - அடிப்படை மட்டம் (2)
இறுதிப்பரீட்சை - 2011/2012
MPZ 2310 - தூயகணிதம் II
காலம்: மூன்று மணித்தியாலம்

திகதி: 23 - 02 - 2012 　　　　　　　　நேரம்: 9.30 - 12.30

ஆறு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

(01) (a) $x^2+y^2=13$, $xy=6$; $x>y>0$ எனின் $(x+y)^2$, $(x-y)^2$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களை காண்க. இதிலிருந்து x, y இனது பெறுமானங்களை காண்க.

(b) $f(x) = x^2+2(\lambda+1)x+(\lambda^2-1)$ என எடுக்க.

(i) x இனது எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களிற்கும் $f(x)$ ஆனது நேராக இருக்குமாறு λ இனுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) சமன்பாடு $f(x)=0$ இனுடைய மூலங்கள் α, β ஆகும். α, β என்பன மெய் ஆகுமாறு λ இனுடைய ஒரு தொகுதி பெறுமானங்களை காண்க.

(c) $\log_a b = x \iff a^x = b$ என்பதை கருத்தில் கொண்டு

(i) $\log_p q \cdot \log_q p = 1$

(ii) $\log_p q \cdot \log_q r \cdot \log_r p = 1$ எனக்காட்டுக.

(iii) $\dfrac{1}{\log_{503} 2012} + \dfrac{1}{\log_4 2012}$ இனது பெறுமானம் காண்க.

(02) (a) கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையைப் பாவித்து எல்லா நேர்முழுவெண் n இற்கும்,
$2^{3n}-1$ ஆனது 7 இனால் வகுபடும் எனக்காட்டுக.

(b) $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ இனை பகுதிப்பின்னமாக்குக.
இதிலிருந்து
$$\frac{1}{2.3.4}+\frac{2}{3.4.5}+\frac{3}{4.5.6}+\cdots\cdots\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$ எனும்
தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையை காண்க.

(c) சமனிலி $|x^2-4|>5$ இனுடைய தீர்வினைக் காண்க.

(03) (a) (i) "OPEN UNIVERSITY" எனும் சொல்களின் எழுத்துக்களிலிருந்து, அவை அனைத்தும் ஒரே நேரத்தில் எடுக்கப்படுமிடத்து, அவற்றிலிருந்து உருவாக்கப்படக்கூடிய ஒழுங்கமைப்புகள் எத்தனை.

(ii) "OPEN UNIVERSITY" எனும் சொற்களில் உள்ள எழுத்துக்களிலிருந்து, நான்கு ஒரே நேரத்தில் எடுக்கப்படுமிடத்து, அதிலிருந்து உருவாக்கப்படக்கூடிய சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

(b) $\left\{ax^2+\frac{1}{bx}\right\}^{11}$ இல் x^7 இனது குணகமும் $\left\{ax-\frac{1}{bx^2}\right\}^{11}$ இல் x^{-7} இனது குணகமும் சமனாக உள்ளவாறு a இற்கும் b இற்கும் இடையிலான தொடர்பைக் காண்க.

(c) பல்லுறுப்பி $f(x)=2x^3-9x^2+7x+6$ இனுடைய ஒரு காரணியைக் காண்பதற்கு காரணித்தேற்றத்தை பயன்படுத்துக. இதிலிருந்து $f(x)$ இனை அதனுடைய ஒருமைக்காரணிகளாக்கு காரணிப்படுத்துக.

(04) (a) $\left|\dfrac{z-12}{z-8j}\right| = \dfrac{5}{3}$, $\left|\dfrac{z-4}{z-8}\right| = 1$ எனும் சமன்பாடுகளை திருப்திப்படுத்தும் சிக்கலெண் Z இனைக் காண்க.

(b) $\dfrac{3+2j\sin\theta}{1-2j\sin\theta}$ ஆனது

(i) மெய்

(ii) கற்பனை ஆகுமாறு θ இனுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க.

(c) பின்வரும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை தீர்க்க.

$x - y + 2z = 9$

$x + y + 5z = 25$

$x + y + z = 9$

(05) (a) $A \equiv (4, 5)$, $B \equiv (-4, 3)$, $C \equiv (-1, -3)$ என எடுக்க. முக்கோணி ABC இனுடைய பக்கங்களின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
உற்பத்தியானது முக்கோணி ABC இன் உட்பக்கத்தில் கிடக்கும் என நிறுவுக.

(b) கோடு $3x+y-1=0$ ஆனது வட்டம் $x^2+y^2-3x-3y+2=0$ இனைத் தொடும் எனக் காட்டுக. அத்துடன் தொடுகைப் புள்ளியினுடைய ஆள்கூறினைக் காண்க.

(06) (a) வட்டங்கள் $S \equiv x^2+y^2-4x+2y=0$, $S' \equiv x^2+y^2+10y+20=0$ என்பன வெளிப்புறமாக ஒன்றையொன்று தொடும் எனக் காட்டுக. அத்துடன் அவையிரண்டும் தொடும் தொடுகைப்புள்ளியின் ஆள்கூறினைக் காண்க. பொதுத் தொடலியினுடைய சமன்பாட்டைக் காண்க.

(b) PQRS எனும் இணைகரத்தின் PQ, QR இனுடைய சமன்பாடுகள் முறையே $3x - y + 7 = 0$, $x - 3y + 5 = 0$ ஆகும். PS ஆனது புள்ளி $(-8, 3)$ இனூடாகவும் RS ஆனது $(5, 2)$ இனூடாகவும் சென்றால் S இனுடைய ஆள்கூறினைக் காண்க.

(07) (a) பின்வரும் எல்லைகளைக் கணிக்க.

(i) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \sin x}$

(ii) $\lim_{x \to 6} \dfrac{x^3 - 216}{x - 6}$

(iii) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{4x^3 + 7x} + 2x\right)$

(b) x குறித்து $\dfrac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x}$ இனை வகையிடுக.

$y = e^{4x} \sin 3x$ எனின் $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 8\dfrac{dy}{dx} + 25y = 0$ எனக் காட்டுக.

(c) மேலும் கீழும் சதுர முகப்பரப்பினைக் கொண்ட ஒரு திறந்த செவ்வகப்பெட்டி ஒன்று $216\ m^3$ கனவளவினை கொள்ளக் கூடியதாக, ஒரு சதுர மீற்றருக்கு ரூபா 1500 செலவில் அமைக்கப்படுகிறது. மேலும் மற்றைய பக்கங்களுக்கு ஒரு சதுர மீற்றருக்கு ரூ 750 உம் செலவிடப்படுகிறது. பொருளாதார ரீதியில் இதனை மிகச்சிறப்பாக உருவாக்குவதற்கு எடுக்கப்பட வேண்டிய பரிமாணங்களை காண்க.

(08) (a) பின்வரும் தொகையீடுகளை காண்க.

(i) $\int \frac{dx}{16x^2+25}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$ (iii) $\int \frac{1-\sin x}{1+\sin x}\,dx$

(b) பின்வரும் வரையறுத்த தொகையீடுகளை காண்க.

(i) $\int_2^3 \frac{2x\,dx}{(1+x)(1+x^2)}$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{(3\cos x + 4\sin x)}{(3\sin x + 4\cos x + 5)}\,dx$

(c) வளையி $y = 64 - x^2$ இனாலும் x அச்சினாலும் அடைக்கப்படும் பரப்பினைக் காண்க.

(09) (a) பின்வரும் சமன்பாடுகளை தீர்க்க.

(i) $\cos x - \cos 3x = \sin 4x - \sin 2x$

(ii) $\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = 1$

(b) சைன், கோசைன் விதிகளைப் பாவித்து $\frac{b+c}{11} = \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13}$ எனின்

(i) $\frac{\sin A}{7} = \frac{\sin B}{6} = \frac{\sin C}{5}$ என நிறுவுக. மேலும்

(ii) $\frac{\cos A}{7} = \frac{\cos B}{19} = \frac{\cos C}{25}$ எனவும் நிறுவுக.

- பதிப்புரிமை உடையது -