00160

ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාව හා තාක්ෂණය උපාධිය සඳහා වූ පදනම් පාඨමාලාව - මට්ටම 02
අවසාන පරීක්ෂණය - 2014/2015
PAF/PAE 2201 - සංයුක්ත ගණිතය I
කාලය :- පැය 03 යි.

දිනය:- **2014.11.30** වේලාව-පෙ.ව.9.30 - ප.ව. 12.30

A කොටස

සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න.

1) $\dfrac{1}{\log_x(xy)}+\dfrac{1}{\log_y(xy)}=1$ බව පෙන්වන්න. , $x, y > 0$, $xy \neq 1$

2) ගණිත අභ්‍යුහනය භාවිතයෙන් $1.2+2.3+3.4+......+n(n+1)=\dfrac{n}{3}(n+1)(n+2)$ බව පෙන්වන්න.

3) $(x^2+x+1)(1-x^2)<0$ අසමානතාවය සපුරාලන x හි තාත්වික අගයන් සොයන්න.

4) $\sqrt{3}\sin x-\cos x$ යන ප්‍රකාශනය $r\,Sin(x-\alpha)$, ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $(r>0)$ සහ $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ වේ. r සහ α අගයන්න. එම ඉහත ප්‍රතිඵලය උපයෝගී කොටගෙන $f(x)=2\left(\sqrt{3}Sinx-Cosx+1\right)$ නම් $-2\le f(x)\le 6$ අතර පිහිටන බව පෙන්වන්න. මෙහි $x\in\mathbb{R}$ වේ.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[(1+2x)^2-(1-2x)^2\right]Sinx}{x^2}$ අගයන්න.

6) සුදුසු ආදේශයක් මගින් $\int_0^{\sqrt{3}} x\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}\,dx$ අගයන්න.

7) (5,3) ලක්ෂයේ සිට $2x-y+4=0$ සරල රේඛාවට ඇඳි ලම්බක සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න. එම ලම්බකයේ අඩියේ ඛණ්ඩාංකද සොයන්න.

8) කේන්ද්‍රය $x+y=1$ රේඛාවේ මත පිහිටියාවූ ද මූල ලක්ෂය සහ (4, 2) ලක්ෂය හරහා යන්නාවූද වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

9) $\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x^2}\right)^{10}$ ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x පදයේ සංගුණකය සොයන්න.

10) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ මාපාංකය හා විස්ථාරය සොයන්න.

B කොටස

ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11) a) $a>0$ නම් සහ $b^2-4ac<0$ නම් සියලුම තාත්වික අගයන් සඳහා ax^2+bx+c යන වර්ගජ ප්‍රකාශනය ධන බව ඔප්පු කරන්න. $a, b, c \in \mathbb{R}$

$f(x)=4x^2+4px-(3p^2+4p-3)$ ලෙස ගනිමු. මෙහි x තාත්වික සංඛ්‍යාවක් වේ. එනයින් $f(x)$ වර්ගජ ශ්‍රිතය ධනවන p හි අගය පරාසය සොයන්න. $p=0$ හා $p=1$ සඳහා $f(x)$ හි දළ සටහන් අඳින්න.

b) $f(x)$ යන බහු පදය $(x-a)(x-b)$ වලින් බෙදූ විට ශේෂය $\left[\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right]x+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$ බව පෙන්වන්න.

12) a) $u_r=\frac{1}{(2r-1)(2r+1)}$ ලෙස ගනිමු. සහ $S_n=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$ ලෙස ගනිමු.

මෙහි $r=1,2,\ldots\ldots$ u_r-u_{r+1} ප්‍රකාශය සලකා $S_n=\frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$ බව පෙන්වන්න.

$n=1,2,\ldots\ldots\ldots$ මෙහි මෙම ශ්‍රේණි අභිසාරිවේද? හේතු දක්වන්න.

b) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ ලෙස ගනිමු. $A^2-3A+8I=0$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ වේ.

එමගින් $A^{-1}=\frac{1}{8}(3I-A)$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත ප්‍රතිඵල උපයෝගිකොට ගෙන $\begin{aligned}2x+3y&=6\\ -2x+y&=2\end{aligned}$ සමගාමී සමීකරණය විසඳන්න.

13) a) සුදු පබලු 5ක්ද, කලු පබලු 4 ක්ද රතු පබලු 3ක්ද නිල් පබලු 2ක්ද නූලක ඇමිනිය හැකි ආකාර ගණන සොයන්න. මෙම සියලුම පබලු එකම ප්‍රමාණයෙන් හා එකම හැඩයෙන් යුක්ත බව සලකන්න. මෙය පිළියෙල කිරිමේ කොපමන ප්‍රමානයක පලමු හා අවසාන පබලුව එකම වර්නයෙන් යුක්තවේද? [ඔබගේ පිළිතුරු සුලුකිරිමට අවශ්‍ය නැත]

b) arg $(Z-a)=\alpha;a\in\mathbb{R}$ සහ $0<\alpha<\pi$ වේ. Z ආගන්ඩ් සටහනේ ලකුණු කරන්න. එමගින් $\arg(Z-1)=\frac{2\pi}{3}$ හා $\arg(Z+1)=\frac{\pi}{6}$ වන පරිදි Z සොයන්න.

14) a) පහත සඳහන් ශ්‍රිත x විෂයෙන් අවකලනය කරන්න.

i. $\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+4}}$ ii. $x^2Sin\left(\frac{\pi}{x^3}\right)$ iii. $x^e+x^x\,;x>0$

b) C වක්‍රය පරාමිතික සමීකරණ $x=2(\theta-Sin\theta)$ සහ $y=2(1-Cos\theta)$ ආකාරයෙන් වේ. මෙහි θ පරාමිතියකි.

$\frac{dy}{dx}=Cot\frac{\theta}{2}$, බව පෙන්වන්න. මෙහි θ,π වල ඉරට්ටේ ගුණාකාරයෙන් නොවේ.

C වක්‍රයට $\theta=\frac{\pi}{2}$ ලක්ෂයේදි ඇදි සපර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න.

15) a) $\int_2^3\frac{x-2}{2x^2-x-3}dx=\frac{3}{5}\ln|4|-\frac{7}{10}\ln|3|$ බව පෙන්වන්න.

b) t=$Tan\frac{x}{2}$, ආදේශයෙන්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+Cosx}$ අගයන්න.

c) අනුකලනය සඳහා වු කොටස් වශයෙන් නීතිය භාවිතා කරමින් $\int e^{2x}Cos3x\,dx$ සොයන්න.

16) a) $lx+my+n=0$ සරල රේඛාවට $p_0\left(x_0,y_0\right)$ ලක්ෂයේ සිට ඇති ලම්බක දුර $\left|\frac{lx_0+my_0+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right|$ බව පෙන්වන්න.

b) $S=x^2+y^2-10x-8y+31=0$ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය සහ අරය සොයන්න.

x-අක්ෂය මත ප්‍රභින්න ලක්ෂය දෙකකින් $S=0$ වෘත්තයට එකිනෙකට ලම්බක සපර්ශක දෙක බැගින් ඇඳිය හැකි බව පෙන්වන්න.

මෙම සපර්ශකවල සමීකරණය සොයන්න.

17) a) $A+B+C=\pi$ නම් $Sin2A+Sin2B-Sin2C=4CosACosBSinC$ බව පෙන්වන්න.

b) $Cos4x+3Sin2x-2=aSin^2 2x+bSin2x+c$ වනසේ a,b හා c නිඛිල සොයන්න. එමගින් $Cos4x+3Sin2x=2$ සමීකරණය විසඳන්න.

0016

The Open University of Sri Lanka
Foundation course in Science – Level 02
Final Examination 2014/2015
PAF2201/PAE2201– Combined Mathematics I

Duration: - Three (3) Hours.

Date: 30/11/2014 **Time: 9.30a.m. – 12 . 30 PM**

PART A

Answer all questions.

1) Show that $\dfrac{1}{\log_x(xy)}+\dfrac{1}{\log_y(xy)}=1$; $\quad \& \ x,y>0$, $xy \neq 1$

2) Prove, by mathematical induction, that
$1.2+2.3+3.4+......+n(n+1)=\dfrac{n}{3}(n+1)(n+2)$.

3) Find the set of real values of x that satisfy the inequality $(x^2+x+1)(1-x^2)<0$.

4) Express $\sqrt{3}\sin x-\cos x$ in the form $rsin(x-\alpha)$, where $(r>0)$ and $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ are constants. Find the values of r and α. Hence, show that if $f(x)=2\left(\sqrt{3}sinx-cosx+1\right)$ then $-2\le f(x)\le 6$ for all $x\in\mathbb{R}$.

5) Evaluate $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\left[(1+2x)^2-(1-2x)^2\right]sinx}{x^2}$

6) Using a suitable substitution, evaluate $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\,dx$

7) Find the equation of the perpendicular from the point (5,3) to the line $2x-y+4=0$. Find also the co-ordinates of the foot of this perpendicular.

8) Find the equation of the circle whose centre is on the line $x+y=1$ and passes through the origin and the point (4, 2).

9) Find the coefficient of x in the binomial expansion of $\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x^2}\right)^{10}$.

10) Find the modulus and argument of the complex number $\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}$.

PART B

Answer five questions only.

11) a) Let a,b,c be real numbers. If $a>0$, prove that the quadratic expression ax^2+bx+c is positive for all real values of x, when $b^2-4ac<0$. Hence find the range of p for which the quadratic function of x $f(x)=4x^2+4px-(3p^2+4p-3)$ is positive for all real values of x. Illustrate your result by making sketch graphs of $f(x)$ for each of the two cases $p=0$ and $p=1$.

b) Show that the remainder when the polynomial $f(x)$ is divided by $(x-a)(x-b)$ is

$$\left[\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right]x+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

12) a) Let $u_r=\dfrac{1}{(2r-1)(2r+1)}$ for $r=1,2,3,\ldots$ and $S_n=\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$ for $r=1,2,\ldots$

By considering u_r-u_{r+1} show that $S_n=\dfrac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$ for $n=1,2,\ldots$

Is this series is convergent? Justify your answer.

b) Given that $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. Show that $A^2-3A+8I=0$.

Deduce that $A^{-1}=\frac{1}{8}(3I-A)$, where $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Hence solve the simultaneous equations

$2x+3y=6$

$-2x+y=2$

13) a) In how many different ways can 5 white beads, 4 black beads, 3 red beads and 2 blue beads of the same size and shapes be set on a string?
Among the above settings, find the number of different ways in which the first and the last beads have the same color.
[Your answer need not be simplified.]

b) If arg $(Z-a)=\alpha; a\in\mathbb{R}$ and $0<\alpha<\pi$, express Z on Argand diagram.

Hence find Z such that $\arg(Z-1)=\dfrac{2\pi}{3}$ and $\arg(Z+1)=\dfrac{\pi}{6}$.

14) a) Differentiate each of the following with respect to x.

i. $\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2+4}}$ ii. $x^2 sin\left(\dfrac{\pi}{x^3}\right)$ iii. $x^e + x^x ; x > 0$

b) A curve C is gives parametrically by equations $x = 2(\theta - sin\theta)$ and $y = 2(1 - cos\theta)$ where θ is a parameter.

Show that $\dfrac{dy}{dx} = cot\dfrac{\theta}{2}$, where θ is not an even multiply of π.

Find the equation of tangent to the curve C at $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

15) a) Show that $\displaystyle\int_2^3 \frac{x-2}{2x^2-x-3}dx = \frac{3}{5}\ln|4| - \frac{7}{10}\ln|3|$.

b) Using the substitution t=$tan\dfrac{x}{2}$, evaluate $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+cosx}$

c) Find $\int e^{2x} cos3x\, dx$,using the method of integration by parts.

16) a) Prove that the perpendicular distance from a point (x_0, y_0) to the straight line

$lx + my + n = 0$ is $\left|\dfrac{lx_0 + my_0 + n}{\sqrt{l^2 + m^2}}\right|$.

b) Find the centre and radius of the circle $S \equiv x^2 + y^2 - 10x - 8y + 31 = 0$.

Show that there are two, distinct points on the x-axis such that the two tangents drawn from each of these points to the circle $S = 0$ are perpendicular to each other.

Find the equation of these tangents.

17) a) If $A + B + C = \pi$ prove that $sin2A + sin2B - sin2C = 4\cos A \cos B sinC$.

b) Find integers a, b and c satisfying $cos4x + 3sin2x - 2 \equiv asin^2 2x + bsin2x + c$ for all real values of x.Hence solve the equation $cos4x + 3sin2x = 2$.

00054

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
விஞ்ஞானத்தில் அடிப்படை கற்கைநெறி - மட்டம் 02
இறுதிப் பரீட்சை- 2014/2015
PAF2201/PAE2201– இணைந்த கணிதம் 1

காலம் - 3 மணித்தியாலங்கள்.

திகதி: 30.11.2014 நேரம்: மு.ப 9.30– மதியம் 12.30

பகுதி **A**

எல்லா வினாக்களுக்கும் விடையளிக்குக.

1) $\dfrac{1}{\log_x(xy)}+\dfrac{1}{\log_y(xy)}=1$ எனக் காட்டுக. $x, y > 0$, $xy \neq 1$

2) கணித தொகுத்தறிவு முறையினை பயன்படுத்தி நிறுவுக.
$1.2+2.3+3.4+......+n(n+1)=\dfrac{n}{3}(n+1)(n+2)$

3) இவ் $(x^2+x+1)(1-x^2)<0$ சமனிலியை திருப்திசெய்யும் x இன் மெய்பெறுமானங்களின் தொடையைக் காண்க.

4) $\gamma Sin(x-\alpha)$ இவ்வடிவில் $\sqrt{3}\sin x-\cos x$ இதனை வெளிப்படுத்துக. இங்கு $(\gamma>0)$ மற்றும் $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ என்பன மாறிலிகளாகும். γ . மற்றும் α இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. இதிலிருந்து எல்லா $x\in\mathbb{R}$ இற்கும் $f(x)=2\left(\sqrt{3}Sinx-Cosx+1\right)$ எனின் $-2\le f(x)\le 6$ எனக் காட்டுக.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[(1+2x)^2-(1-2x)^2\right]Sinx}{x^2}$ மதிப்பிடுக.

6) ஒரு பொருத்தமான மாற்றீட்டை பயன்படுத்தி $\int_0^{\sqrt{3}} x\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}\,dx$ இனை மதிப்பிடுக.

7) $2x-y+4=0$ இவ் நேர்கோட்டிற்கு (5,3) என்னும் புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்து சமன்பாட்டை காண்க. இச் செங்குத்தின் அடி ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

8) $x+y=1$ என்னும் நேர்கோட்டின் மீது மையமும் மற்றும் உற்பத்திக்கு ஊடாகவும் மற்றும் (4, 2) என்னும் புள்ளிக்கு ஊடாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

9) $\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x^2}\right)^{10}$ ஈறுருப்பு விரிவின் x இன் குணகத்தை காண்க.

10) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}$ சிக்கலெண்ணின் மட்டு மற்றும் வீச்சம் என்பனவற்றை காண்க.

00054

பகுதி B

ஐந்து வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

11) a) $a>0$ எனின் $b^2-4ac<0$ ஆகும் போது x இன் எல்லா மெய் பெறுமானங்களுக்கும் $(a, b, c \in \mathbb{R})$ ax^2+bx+c என்னும் இருபடிசமன்பாடானது நேர் என நிறுவுக. இதிலிருந்து x இன் எல்லா மெய் பெறுமானங்களுக்கும் x இன் இருபடிசமன்பாடு $f(x)=4x^2+4px-(3p^2+4p-3)$ நேராக, p இன் வீச்சை காண்க. $p=0$ மற்றும் $p=1$ என்னும் ஒவ்வொரு $f(x)$ நிகழ்விற்குமான உமது விடையை வரைபடம் வரைவதன் மூலம் எடுத்து காட்டுக.

b) $f(x)$ என்னும் பல்லுறுப்பியை $(x-a)(x-b)$ இனால் வகுக்கும் போதான மீதி

$\left[\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right]x+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$ எனக் காட்டுக.

12) a) இங்கு $r=1, 2, 3, \ldots$ இற்கு $u_r=\frac{1}{(2r-1)(2r+1)}$ மற்றும் $r=1,2,\ldots$ இற்கு

$S_n=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$ என்க. u_r-u_{r+1} இனால் கருதும் போது $n=1,2,\ldots$ இற்கு

$S_n=\frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$ எனக் காட்டுக.

இத் தொடரானது ஒருங்குமா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

b) $A^2-3A+8I=0$ எனத் தரப்படின் $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ எனக் காட்டுக.

$A^{-1}=\frac{1}{8}(3I-A)$ இனை உய்த்தறிக, இங்கு $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ஆகும். இதிலிருந்து ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் $\begin{matrix} 2x+3y=6 \\ -2x+y=2 \end{matrix}$ எனக் காட்டுக.

13) a) ஒரு சரத்தில் எத்தனை வித்தியாசமான வழிகளில் ஒரேயளவுமானதும் மற்றும் ஒரே வடிவமானதுமான 5 வெள்ளை மணிகள், 4 கறுப்புமணிகள், 3 சிவப்புமணிகள் மற்றும் 2 நீலமணிகளை அமைக்கலாம்?

மேலுள்ள அமைப்புக்களின் மத்தியில் எத்தனை வழிகளில் முதலவாதும் கடைசியும் ஒரே நிறத்தை கொண்டிருக்கும் என காண்க. (உமது விடையை சுருக்க தேவையில்லை)

b) $\arg(Z-a)=\alpha; a\in\mathbb{R}$ மற்றும் $0<\alpha<\pi$ ஆகும் போது Z இனை ஆர்கன் வரைபடத்தின் மீது வெளிப்படுத்துக. இதிலிருந்து $\arg(Z-1)=\frac{2\pi}{3}$ மற்றும் $\arg(Z+1)=\frac{\pi}{6}$ ஆகும் போது Z இனை காண்க.

14) a) x குறித்து பின்வருவனற்றை வகையிடுக.

i. $\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2+4}}$ ii. $x^2 Sin\left(\dfrac{\pi}{x^3}\right)$ iii. $x^e + x^x \,; x>0$

b) ஒரு வளைவு C யானது $x=2(\theta - Sin\theta)$ மற்றும் $y=2(1-Cos\theta)$ இவ் சமன்பாடுகளால் பரமான வடிவில் தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு θ பரமானமாகும்.

$\dfrac{dy}{dx} = Cot\dfrac{\theta}{2}$ எனக் காட்டுக. இங்கு θ ஆனது π இன் இரட்டை மடங்கொன்றல்ல.

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ இல் வளைவு C இன் தொடலியின் சமன்பாட்டை காண்க.

15) a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x-2}{2x^2-x-3}dx = \frac{3}{5}\ln|4| - \frac{7}{10}\ln|3|$ எனக் காட்டுக.

b) t=$Tan\dfrac{x}{2}$ மாற்றீட்டை பயன்படுத்தி $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+Cosx}$ மதிப்பிடுக.

c) பகுதிகளாக தொகையிடுதல் முறையைப் பயன்படுத்தி $\int e^{2x} Cos3x\, dx$ ஐக் காண்க.

16) a) (x_0, y_0) புள்ளியிலிருந்து $lx+my+n=0$ இவ் நேர் கோட்டிற்கு வரையப்படும்

செங்குத்து தூரம் $\left|\dfrac{lx_0+my_0+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right|$ என நிறுவுக.

b) $S = x^2+y^2-10x-8y+31=0$ இவ்வட்டத்தின் மையத்தையும் மற்றும் ஆரையையும்

காண்க. $S=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு இவ் ஒவ்வொரு புள்ளியிலிருந்தும் வரையப்படும் இரண்டு தொடலியும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும் என்னும் போது அங்கு இரண்டு வித்தியாசமான புள்ளிகள் உள்ளன எனக் காட்டுக.

17) a) $A+B+C=\pi$ எனின் $Sin2A+Sin2B-Sin2C=4CosACosBSinC$ என நிறுவுக.

b) $Cos4x+3Sin2x-2 = aSin^2 2x + bSin2x + c$ இனை திருப்திப்படுத்தும் x இன் எல்லா

மெய்பெறுமானங்களுக்கும் a, b மற்றும் c என்னும் முழு எண்ணைகளைக் காண்க. இதிலிருந்து $Cos4x+3Sin2x=2$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.