16

00076

ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව
අවසාන පරීක්ෂණය - 2009/2010
ව්‍යවහාරික ගණිතය - තුන්වන මට්ටම
APU 1142 – අවකල සමීකරණ

කාලය පැය දෙකයි.

දිනය : 2010.06.15 වේලාව - ප.ව. 1.00 - ප.ව. 3.00 දක්වා.

ප්‍රශ්න හතරකට පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(x-1)(y+2)}{x(y-1)(x+2)}$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(ii) $y=Vx^2$ ආදේශය උපයෝගී කර ගැනීමෙන්, $x^2\dfrac{dy}{dx}-2xy+3=0$ අවකල සමීකරණය $\dfrac{dV}{dx}=\dfrac{-3}{x^4}$ ආකාරයට ඌණනය කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

එනයින්, x ඇසුරෙන් y සඳහා සාධාරණ විසඳුම $y=\lambda x^2+\dfrac{1}{x}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි λ යනු අභිමත නියතයකි.

2. (i) $M, N, \dfrac{\partial M}{\partial y}$ සහ $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ යනු x සහ y හි සන්තතික ශ්‍රිත නම්, $M\,dx+N\,dy=0$ යන්න සපිරි අවකල සමීකරණයක් වීම සඳහා අනිවාර්ය සහ ප්‍රමාණවත් අවශ්‍යතාවය සඳහන් කරන්න.

$\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)=0$ සමීකරණය, සපිරි අවකල සමීකරණයක් බව පෙන්වා, එනයින් එය විසඳන්න.

(ii) $x^p y^q$ යන්න, $\left(4xy^2+6y\right)dx+\left(5x^2y+8x\right)dy=0$ සමීකරණයෙහි අනුකලන සාධකය නම්, p සහ q හි අගය සොයන්න.
එනයින්, දී ඇති අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

3. එක්තරා සත්ත්ව විශේෂයක සංගණනය $P(t)$ ලෙස ගනිමු.

$P(t)$ යන්න, $\dfrac{dP}{dt}=\dfrac{1}{25000}P(t)\left(1000-P(t)\right)$; $P(0)=100$, ප්‍රවර්ධන සමීකරණය තෘප්ත කරන්නේ යැයි උපකල්පනය කරමු; මෙහි t අවුරුදුවලින් මැන ඇත.

අවුරුදු 10 කට පසු සත්ත්ව ගහනය $\dfrac{1000}{1+9e^{-\frac{2}{5}}}$ බව පෙන්වන්න.

$P(t)$ හි දීර්ඝ කාලීන හැසිරීම කුමක්ද?

00076

4. (i) පළමු ඝණයේ ඒකජ අවකල සමීකරණය වන, $\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)$ හි සාධාරණ විසඳුම,

$$y(x)=e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx+C\right\}$$ බව බෙන්වන්න; මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

(ii) $z=\frac{1}{y}$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $(1+x^2)\frac{dy}{dx}-4xy=e^x y^2$ අවකල සමීකරණය,

$\left(1+x^2\right)\frac{dt}{dx}+4xz=-e^x$ ඒකජ අවකල සමීකරණයට පරිණාමනය කරන්න.

එනයින්, $x=0$ විට $y=1$ බව දී ඇති විට, ඉහත අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

5. (i) $2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0$; $x>0$ අවකල සමීකරණයෙහි සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

[ඉඟිය: පළමුව $y=x^n$ ආකාරයේ විසඳුමක් යොදා බලන්න.]

(ii) පහත දී ඇති අවකල සමීකරණයට එහි සාධාරණ විසඳුමෙහි සයින් හා කෝසයින් පද අඩංගු වන්නේ k හි කුමන අගයන් සඳහාද?

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4k\frac{dy}{dx}+4y=0.$$

(iii) පහත දැක්වෙන අවකල සමීකරණයේ ව්‍යක්තික අනුකලය සෙවීමට " $D-$operator " ක්‍රමය භාවිතා කර, එනයින්, එහි සාධාරණ විසඳුම ලබාගන්න.

$$\left(D^2-5D+6\right)y=e^{2x}x^2 \text{, මෙහි } \left(D\equiv\frac{d}{dx}\right).$$

6. (i) $f(x)=\sin x$ ශ්‍රිතයෙහි $x_0=0$ ලක්ෂ්‍යය වටා ටේලර් ශ්‍රේණි ප්‍රසාරණය සොයා, ප්‍රසාරණයේ අභිසාරි ප්‍රාන්තරයද සොයන්න.

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}=xy$ අවකල සමීකරණයේ ශ්‍රේණිය විසඳුම, a_0 සහ a_1 යනු අභිමත නියත විට $y=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කල හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $y_1(x)$ සහ $y_2(x)$ යනු නිර්ණය කල යුතු x හි ශ්‍රිත වේ.

The Open University of Sri Lanka
B.Sc/B.Ed. Degree Programme
Final Examination - 2009/2010
Applied Mathematics - Level 03
APU1142 – Differential Equations
Duration: - Two hours

Date: 15.06.2010 **Time: 1.00 p.m. - 3.00 p.m.**

Answer **FOUR** questions.

1. (i) Solve the differential equation: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(x-1)(y+2)}{x(y-1)(x+2)}$

(ii) Show that the differential equation $x^2\dfrac{dy}{dx}-2xy+3=0$ may be reduced to the form $\dfrac{dV}{dx}=-\dfrac{3}{x^4}$ by means of the substitution $y=Vx^2$.

Hence, show that the general solution for y in terms of x is $y=\lambda x^2+\dfrac{1}{x}$, where λ is an arbitrary constant.

2. (i) If $M, N, \dfrac{\partial M}{\partial y}$ and $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ are continuous functions of x and y, state a necessary and sufficient condition for $M\,dx+N\,dy=0$ to be an exact equation.

Show that the differential equation $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0$ is exact, and hence solve it.

(ii) If $x^p y^q$ is an integrating factor of the equation $\left(4xy^2+6y\right)dx+\left(5x^2y+8x\right)dy=0$, find the values of p and q.
Hence, solve the given differential equation.

3. Let $P(t)$ be the population of a certain animal species. Assume that $P(t)$ satisfies the logistic growth equation

$$\frac{dP}{dt}=\frac{1}{25000}P(t)\left(1000-P(t)\right),\quad P(0)=100;\ \text{where } t \text{ is measured in years.}$$

Show that the population after 10 years is $\dfrac{1000}{1+9e^{-\frac{2}{5}}}$.
What is the long-term behavior of the population $P(t)$?

4. (i) Show that the general solution of the first order linear differential equation,

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x) \text{ is}$$

$y(x)=e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}\,dx+C\right\}$, where C is an arbitrary constant.

(ii) Using a substitution $z=\frac{1}{y}$ transform the differential equation $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}-4xy=e^x y^2$

in to the linear differential equation $\left(1+x^2\right)\frac{dz}{dx}+4xz=-e^x$.

Hence, solve the differential equation given that $y=1$ when $x=0$.

5. (i) Find the general solution of the differential equation $2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0$, $x>0$

[**Hint**: first look for solution of the form $y=x^n$.]

(ii) For which values of the constant k does the differential equation below have a general solution that involves *sines* and *cosines*?

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4k\frac{dy}{dx}+4y=0.$$

(iii) Use the "$D-$operator" method to find the particular integral of the following differential equation and hence obtain the general solution of it:

$$\left(D^2-5D+6\right)y=e^{2x}x^2, \text{ where}\left(D\equiv\frac{d}{dx}\right).$$

6. (i) Find the Taylor series expansion of the function $f(x)=\sin x$, about the point $x_0=0$ and find the interval of convergence of the expansion.

(ii) Show that the series solution of the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2}=xy$ is of the form, $y=a_0\,y_1(x)+a_1y_2(x)$; where a_0 and a_1 are arbitrary constants and $y_1(x)$ and $y_2(x)$ are functions of x to be determined.

00023

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
விஞ்ஞானமாணி/கல்விமாணி பட்டப்பாடநெறி
இறுதிப் பரீட்சை – **2009/2010**
பிரயோகக் கணிதம் – மட்டம் **03**
APU 1142 – வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்

காலம் :- இரண்டு மணித்தியாலங்கள.

நாள் :- **15-06-2010** நேரம்:- பிப **1.00**– பிப **3.00**

நான்கு வினாக்களுக்கு விடையளிக்குக.

1. (i) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(x-1)(y+2)}{x(y-1)(x+2)}$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(ii) $x^2\dfrac{dy}{dx}-2xy+3=0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை $y=Vx^2$ என்னும் பிரதியீட்டின் மூலம் $\dfrac{dV}{dx}=-\dfrac{3}{x^4}$ என்னும் வடிவத்திற்கு ஒடுக்கலாம் எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து y இற்குரிய x சார்பான பொதுத்தீர்வு $y=\lambda x^2+\dfrac{1}{x}$ எனக்காட்டுக. இங்கு λ ஒரு எதேச்சை மாறிலியாகும்.

2. (i) $M, N, \dfrac{\partial M}{\partial y}$ மற்றும் $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ என்பன x மற்றும் y இலுள்ள தொடர்ச்சியான சார்புகள் ஆயின் $M\,dx+N\,dy=0$ என்பது செப்பமான சமன்பாடு ஆவதற்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனையை குறிப்படுக.

$\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாடு செப்பமானது எனக்காட்டி இதிலிருந்து அதைத் தீர்க்க.

(ii) $x^p y^q$ என்பது $\left(4xy^2+6y\right)dx+\left(5x^2y+8x\right)dy=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணி எனின், p மற்றும் q இற்குரிய பெறுமானங்களை காண்க.
இதிலிருந்து தரப்பட்ட வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

3. ஒரு குறிப்பிட்ட விலங்கு இனத்தின் சனத்தொகை $P(t)$ என்க. $P(t)$ என்பது

$\dfrac{dP}{dt}=\dfrac{1}{25000}P(t)\left(1000-P(t)\right),\quad P(0)=100$; இங்கு t ஆனது வருடங்களில் அளக்கப்படுகிறது,

என்னும் அளக்கைக்குரிய வளர்ச்சி சமன்பாட்டை பூர்த்தி செய்கிறது எனக் கருதுக.

10 வருடங்களின் பின் சனத்தொகையானது $\dfrac{1000}{1+9e^{-\frac{2}{3}}}$ எனக்காட்டுக.

சனத்தொகை $P(t)$ இனுடைய நீண்ட கால நடத்தை என்ன?

4. (i) $\dfrac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)$ என்னும் முதலாம்படி ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு

$y(x)=e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}\,dx+C\right\}$ எனக்காட்டுக. இங்கு C என்பது எதேச்சை மாறிலியாகும்.

(ii) $z=\dfrac{1}{y}$ என்னும் பிரதியீட்டை பயன்படுத்தி $\left(1+x^2\right)\dfrac{dy}{dx}-4xy=e^x y^2$ என்னும் வகையீட்டுச்

சமன்பாட்டை $\left(1+x^2\right)\dfrac{dz}{dx}+4xz=-e^x$ என்னும் ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு மாற்றுக.

இதிலிருந்து, $x=0$ ஆகும் போது $y=1$ எனத்தரப்படின் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

5. (i) $2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=0,\ \ x>0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வினைக் காண்க.

(உதவிக்கு: முதலில் $y=x^n$ என்னும் வடிவத்திற்குரிய தீர்வைக் கவனிக்க.)

(ii) மாறிலி k இன் எந்த பெறுமானங்களுக்கு கீழே தரப்பட்டுள்ள வகையீட்டுச் சமன்பாடானது சைன்களையும் மற்றும் கோசைன்களையும் உள்ளடக்கிய பொதுத்தீர்வினை கொண்டுள்ளது.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4k\frac{dy}{dx}+4y=0.$$

(iii) D - செயலி முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் குறிப்பிட்ட தொகையீட்டைக் காண்க, மற்றும் இதிலிருந்து அதன் பொதுத்தீர்வினை பெறுக.

$$\left(D^2-5D+6\right)y=e^{2x}x^2\text{, இங்கு }\left(D\equiv\frac{d}{dx}\right).$$

6. (i) $f(x)=\sin x$ என்னும் சார்பின் தெயிலர் தொடர் விரிவை $x_0=0$ என்னும் புள்ளி பற்றி காண்க, மற்றும் விரிவின் ஒருங்கல் ஆயிடையைக் காண்க.

(ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=xy$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தொடர் தீர்வு $y=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$ என்னும் வடிவத்தில் இருக்கும் எனக்காட்டுக. இங்கு a_0 மற்றும் a_1 என்பன எதேச்சை மாறிலிகள் மற்றும், $y_1(x)$ மற்றும் $y_2(x)$ என்பன x இன் கணிக்கப்படவேண்டிய சார்புகள் ஆகும்.