இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்

விஞ்ஞான இளமாணி/ கல்வி இளமாணி பட்டப்படிப்பு, தொடர் கல்வி கற்கைநெறி

இறுதிப் பரீட்சை 2024/2025

மட்டம் 03 தூய கணிதம்

PEU3202 காவி வெளிகள்

காலம்: - இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

திகதி: - 15-05-2025 **நேரம்: பி.ப. 1.30 – பி.ப. 3.30**

நான்கு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்கவும்.

1.

(a) F என்னும் ஒரு புலத்தின் மேல் V ஒரு காவி வெளி எனக் கொள்க. அனைத்து $\alpha \in F$ மற்றும் அனைத்து $x \in V - \{0\}$ இற்கும்,

(i) $\alpha \cdot x = 0$ எனின் $\alpha = 0$

(ii) $\alpha \cdot x = \beta \cdot x$ எனின் $\alpha = \beta$, எனவும் நிறுவுக.

(b) $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ என்க. அனைத்து $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M$ இற்கும், M இல் இரண்டு செய்கைகள்,

$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$ மற்றும் $\alpha \in \mathbb{R}$ இற்கு $\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ எனவும் வரையறுக்கப்படுகின்றன, இங்கு $\mathbb{R}$ ஒரு மெய் எண் புலம் ஆகும். இந்த செய்கைகளின் கீழ் மெய் எண்களினுடைய புலத்தின் மேல் M ஒரு காவி வெளியா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(c) $u_1 = (1,2,2), u_2 = (-1,-1,-2)$ மற்றும் $u_3 = (1,0,1)$ ஆகிய மூன்று காவிகளின் தொடை $\mathbb{R}^3$ இன் ஒரு அடிமூலத்தை உருவாக்குகிறதா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(d) $S = \{P_1 = 1 - x,\ P_2 = 5 + 2x^2,\ P_3 = -3 + 3x - x^2\}$ ஆனது $\mathbb{R}$ என்னும் புலத்தின் மேல் அதிகூடிய படி 2 ஐ உடைய எல்லா பல்லுறுப்பிகளின் காவிவெளியில் ஒரு உபதொடை என்க. $\mathbb{R}$ புலத்தின் மீது S ஏகபரிமாணமுறையாய்ச் சாராதா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

2.

(a) F என்னும் ஒரு புலத்தின் மேல் V ஒரு காவி வெளி மற்றும் $W \subseteq V$ மற்றும் $W \neq \emptyset$ என்க. F இன் மேல் W என்பது ஒரு காவி வெளி V இன் ஒரு உபவெளி என்றால் என்றால் மட்டும் எல்லா $\alpha, \beta \in F$ மற்றும் $x, y \in W$ இற்கு $\alpha x + \beta y \in W$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

(b) பின்வரும் தொடைகள் காவி வெளி $\mathbb{R}^3$ இல் வழமையான கூட்டல் மற்றும் எண்ணிப் பெருக்கத்தின் கீழ் புலம் $\mathbb{R}$ இன் மேல் காவி வெளி $\mathbb{R}^3$ இன் உபவெளிகளா எனத் துணிக. ஒவ்வொறு வகையிலும் உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(i) $A = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}$ மற்றும் $b = 2a + c^2\}$

(ii) $B = \{(a,b,c) \mid a,b \in \mathbb{R}$ மற்றும் $a = b = c\}$

(c) F என்னும் ஒரு புலத்தின் மேல் W_1 மற்றும் W_2 என்பன காவிவெளி V இன் உபவெளிகள் எனக் கொள்க. புலம் F இன் மேல் காவிவெளி V இல் $W_1 \cap W_2$ ஒரு உபவெளி என நிறுவுக.

3.

(a) F என்னும் புலத்தின் மேல் V ஆனது ஒரு காவி வெளி எனக் கொள்க. $b \in V$ ஆனது $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n \in V$ என்னும் காவிகளின் தொடையின் ஒரு ஏகபரிமாண சேர்மானம் எனின், V இல் $\{b, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n\}$ ஆனது ஏகபரிமாணமுறையாய்ச் சார்ந்தது எனக் காட்டுக.

(b) F என்னும் புலமொன்றின் மேல் a, b மற்றும் c என்பன V இல் ஏகபரிமாணமுறையாய்ச் சாராத காவிகள் எனின், $a - b, b - c, c - a$ ஆகிய காவிகளும் ஏகபரிமாணமுறையாய்ச் சாராதவையா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(c) W ஆனது F என்னும் புலத்தின் மேல் ஒரு முடிவுள்ள பரிமாணத்தைக் கொண்ட காவி வெளி V இன் ஒரு உபவெளி எனக் கொள்க, $\dim W = \dim V$ என்றால் என்றால் மட்டும் $W = V$ என நிறுவுக.

(d) $W = \{(1,1,-2,0), (2,1,-3,0), (-1,0,1,0), (0,1,-1,0)\}$ என்க. $\mathbb{R}^4$ இன் உபவெளி $Sp < W >$ க்கு ஒரு அடிமூலத்தைக் காண்க.

4.

(a) $T : V \to W$ ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றம் என்க, இங்கு V மற்றும் W ஆகியன காவி வெளிகள் ஆகும்.

(i) $\ker T$ என்பது V இன் ஒரு உபவெளி, மற்றும்

(ii) $\ker T = \{0\}$ என்றால் என்றால் மட்டும் T ஒன்றுக்கொன்று, எனவும் காட்டுக.

(b) $V = \mathbb{R}^2$ மற்றும் $W = \mathbb{R}^3$ என்க. வழமையான கூட்டல் மற்றும் எண்ணி பெருக்கத்தின் கீழ் புலம் $\mathbb{R}$ இன் மேல் V மற்றும் W என்பன காவிவெளிகள் எனக் கருதுக.

$T : V \to W$ என்னும் படமாக்கமானது $T(x,y) = (2x, 2x + y, x + 2y)$ இனால் வரையறுக்கப்படுகிறது என்பதை கருதுக.

(i) T என்பது ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றம் எனக் காட்டுக.

(ii) T இன் அகணியைக் காண்க.

(iii) T ஒரு சமவுருவாக்கமா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

5.

(a) வழமையான கூட்டல் மற்றும் எண்ணி பெருக்கத்தின் கீழ் புலம் $\mathbb{R}$ இன் மேல் $\mathbb{R}^4 = \{(a,b,c,d)\ |a,b,c,d\ \in\ \mathbb{R}\}$ ஒரு காவி வெளி என்க.

$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ என்னும் படமாக்கமானது $T(\ (a,b,c,d) = (a+b, b, 3c, c+d)$ இனால் வரையறுக்கப்படுகிறது என்க. T ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றம் எனக் கருதுக. பின்வரும் தொடைகள் புலம் $\mathbb{R}$ இன் மேல் T இன் கீழ் காவி வெளி $\mathbb{R}^4$ இன் மாற்றமில் உபவெளிகளா என்பதைத் துணிக.

(i) $W = \{\ (a,b,0,0)\ |a.b \in \mathbb{R}\ \}$

(ii) $W = \{\ (a,0,0,b)\ |a,b\ \in\ \mathbb{R}\ \}$

(b)

(i) உட்பெருக்க வெளி ஒன்றை வரையறுக்குக.

(ii) F என்னும் ஒரு புலத்தின் மேல் V ஒரு உட்பெருக்க வெளி என்க. $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathrm{V}$ இற்கு $< x_1 + x_2, y_1 + y_2 > = < x_1, y_1 > + < x_1, y_2 > + < x_2, y_1 > + < x_2, y_2 >$ என நிறுவுக.

(iii) $u = (x_1, x_2, x_3),\ v = (y_1, y_2, y_3)$ என்க, இங்கு $u, v \in \mathbb{R}^3$ ஆகும். $< u, v > = {x_1}^2 - {x_2}^2 - x_1 x_3$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. $< u, v >$ என்பது $\mathbb{R}^3$ இன் ஒரு உட்பெருக்கமா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

6.

(a) u மற்றும் v என்பன ஊக்கிட்டு வெளியொன்றிலுள்ள யாதாயினும் இரண்டு காவிகள் என்க.

(i) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ என நிறுவுக.

(ii) u மற்றும் v என்பவற்றிக்கு இடையிலான கோணத்தை வரையறுக்க.

(iii) E^3 என்பது வழமையான ஊக்கிட்டு மூவெளி மற்றும் $u, v \in E^3$ எனக் கொள்க. $u = (1, -1, 2\ )$ மற்றும் $v = (2,1,0)$ என்க. u மற்றும் v என்பவற்றிக்கு இடையிலான கோணத்தைக் காண்க.

(b) மூன்று காவிகள் $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (0,0,1)$ மற்றும் $u_3 = (1,0,-1)$ என்பன வழமையான ஊக்களிட்டு மூவெளி E^3 இற்கான ஒரு அடிமூலத்தை உருவாக்கும் எனக் காட்டுக. கிராம்சிமிற்றர் செயற்பாட்டை பயன்படுத்தி $\{u_1, u_2, u_3\}$ இலிருந்து E^3 இற்கான நிமிர்செவ்வனடி மூலம் ஒன்றை அமைக்க.

147