00280

ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව
අවසාන පරීක්ෂණය - 2024/2025
ශුද්ධ ගණිතය - තුන්වන මට්ටම
PEU3202/PEE3202 – දෛශික අවකාශ

කාලය පැය දෙකයි.

දිනය : - 15-05-2025 **වේලාව : 1.30 p.m. - 3.30 p.m.**

ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1.

(a) V යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයකි. සියලුම $\alpha \in F$ සහ සියලුම $x \in V - \{0\}$ සඳහා

(i) $\alpha \cdot x = 0$ නම් $\alpha = 0$

(ii) $\alpha \cdot x = \beta \cdot x$ නම් $\alpha = \beta$

බව සාධනය කරන්න.

(b) $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ ලෙස ගනිමු. ඕනෑම $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M$ සහ $\alpha \in \mathbb{R}$ සඳහා;

$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$ සහ $\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ මගින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ. $\mathbb{R}$ යනු තාත්වික සංඛ්‍යා ක්ෂේත්‍රය වේ. M යනු තාත්වික සංඛ්‍යා ක්ෂේත්‍රය මත දෛශික අවකාශයක්ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(c) $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ $\mathbb{R}^3$ දෛශික අවකාශයෙහි දෛශික $u_1 = (1, 2, 2)$, $u_2 = (-1, -1, -2)$ සහ $u_3 = (1, 0, 1)$ ඒකජ ස්වායත්ත ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(d) $S = \{P_1 = 1 - x, P_2 = 5 + 2x^2, P_3 = -3 + 3x - x^2\}$ යනු $\mathbb{R}$ මත වූ උපරිම මාත්‍රය දෙකවූ සියලුම බහුපද දෛශික අවකාශයෙහි උප කුලකයකි.. S කුලකය ඒකජ ස්වායත්තද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

2.

(a) V යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයකි. $W \subseteq V$ සහ $W \neq \phi$ වේ. $\alpha, \beta \in F$ සහ $x, y \in W$ සඳහා $\alpha x + \beta y \in W$ වේ නම් හා නම්ම පමණක් W යනු V හි උප අවකාශයක් බව සාධනය කරන්න.

(b) පහත දැක්වෙන කුලක සුපුරුදු එකතුව සහ අදිශ ගුණිතය යටතෙ $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ $\mathbb{R}^3$ දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශ **වේ දැයි** සොයා බලන්න. ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(i) $A = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \text{ and } b = 2a + c^2\}$

(ii) $B = \{(a, b, c) \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ and } a = b = c\}$

(c) W_1 සහ W_2 යනු V යන F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශ නම් $W_1 \cap W_2$ යනු V යන F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශයක් බව සාධනය කරන්න.

3.

(a) V යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයකි. $b \in V$ යනු $a_1, a_2, \ldots \ldots a_n \in V$ දෛශිකයන්හි ඒකජ සංයෝජනයක් නම් $\{b, a_1, a_2, \ldots \ldots a_n\}$ කුලකය ඒකජව පරායත්ත බව පෙන්වන්න.

(b) a, b සහ c යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ V දෛශික අවකාශයෙහි ඒකජව ස්වායත්ත දෛශික **නම්,** $a - b,\ b - c,\ c - a$ දෛශික ඒකජව ස්වායත්ත ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(c) V යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ පරිමිත මාන දෛශික අවකාශයකි. W යනු V හි උප අවකාශයක් වේ. $W = V$ නම් හා නම්ම පමණක් $\dim W = \dim V$ බව සාධනය කරන්න.

(d) $W = \{(1, 1, -2, 0), (2, 1, -3, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 0)\}$ වේ. $\mathbb{R}^4$ හි $Sp\langle W \rangle$ උප අවකාශය සඳහා පදනමක් සොයන්න.

4.

(a) $T : V \to W$ යනු ඒකජ පරිනාමණයකි. V සහ W යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශවේ.

(i) T හි මදය V හි උප අවකාශයක් බව පෙන්වන්න.

(ii) T හි මදය $= \{0\}$ නම් හා නම්ම පමණක් T එකට එක බව පෙන්වන්න.

(b) $V = \mathbb{R}^2$ සහ $W = \mathbb{R}^3$ ලෙස ගනිමු. V සහ W සුපුරුදු එකතුව සහ අදිශ ගුණිතය යටතේ $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශ වේ.

$T : V \to W$ යනු $T(x, y) = (2x, 2x + y, x + 2y)$ මගින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ.

(i) T ඒකජ පරිනාමණයක් බව පෙන්වන්න.

(ii) T හි මදය සොයන්න.

(iii) T යනු සමරූපිතාවයක්ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

139

5.

(a) $\mathbb{R}^4 = \{(a,b,c,d)\,|a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ යනු සුපුරුදු එකතුව සහ අදිශ ගුණිතය යටතේ $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශය වේ.

$T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ යනු $T((a,b,c,d) = (a+b, b, 3c, c+d)$ මගින් අර්ථ දක්වන ඒකජ පරිනාමණය වේ. පහත දැක්වෙන කුලක අතරින් කවරක් T යටතේ $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ M දෛශික අවකාශයේ අවිචලක උප අවකාශයක් වේද යන්න සොයන්න.

(i) $W = \{(a,b,0,0)\,|a.b \in \mathbb{R}\}$

(ii) $W = \{(a,0,0,b)\,|a,b \in \mathbb{R}\}$

(b)

(i) අන්තර් ගුණිත අවකාශය අර්ථ දක්වන්න .

(ii) V යනු $\boldsymbol{F}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ අන්තර් ගුණිත අවකාශයකි $x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$ සඳහා,

$$< x_1 + x_2, y_1 + y_2 > = < x_1, y_1 > + < x_1, y_2 > + < x_2, y_1 > + < x_2, y_2 >$$

බව සාධනය කරන්න.

(iii) $u = (x_1, x_2, x_3),\ v = (y_1, y_2, y_3)$ ලෙස ගනිමු. $u, v \in \mathbb{R}^3$.

$< u, v > = {x_1}^2 - {x_2}^2 - x_1x_3$ මගින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ.$< u, v >$ යනු $\mathbb{R}^3$ මත වූ අන්තර් ගුණිත අවකාශයක්ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

6.

(a) u සහ v යනු දෛශික යුක්ලීඩීය දෛශික අවකාශයෙහි දෛශික දෙකකි.

(i) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ බව සාධනය කරන්න.

(ii) u සහ v දෛශික අතර කෝණය අර්ථ දක්වන්න.

(iii) $u = (1,-1,2)$ and $v = (2,1,0)$ යනු E^3යුක්ලීඩීය දෛශික අවකාශයෙහි දෛශික දෙකකි. u සහ v දෛශික අතර කෝණය සොයන්න.

(b) $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (0,0,1)$ සහ $u_3 = (1,0,-1)$ යන දෛශික E^3 සුපුරුදු යුක්ලීඩීය දෛශික අවකාශයෙහි පදනමක් බව පෙන්වන්න. Gram–Schmidt ක්‍රියාවලිය මගින් $\{u_1, u_2, u_3\}$. E^3 හි ප්‍රලම්බ පදනමක් බවට පරිනාමණය කරන්න.