068

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
கணிதத் திணைக்களம்
விஞ்ஞானத்தில் உயர்சான்றிதழ்
MYF2520 / MHF2520 - இணைந்த கணிதம் 2 – மட்டம் 2
இறுதிப் பரீட்சை 2023/24

திகதி: 27-01-2024 | **மு.ப. 9:30 இலிருந்து பிப 12:30 வரை**

பகுதி A இல் **அனைத்து** வினாக்களுக்கும் மற்றும் **பகுதி B** இல் ஐந்து வினாக்களுக்கும் விடையளிக்குக.

பகுதி A

1. A மற்றும் B இன் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}$ மற்றும் $\underline{b}$ ஆகும். C என்பது AB இன் நடுப்புள்ளி, $AD:DB = 1:2$ என ஆகுமாறு D என்பது AB இன் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி மற்றும் $AE:EB = 2:1$ என ஆகுமாறு E என்பது AB இன் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி என்க. C, D மற்றும் E இன் தானக் காவிகளைக் காண்க.

2. $\underline{a}$ மற்றும் $(\underline{a}+\underline{b})$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும் காவிகள் எனின், $|\underline{a}+\underline{b}|^2 = |\underline{b}^2 - \underline{a}^2|$ எனக் காட்டுக.

3. ஒரு 2θ கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும் இரண்டு சம விசைகளின் விளையுளானது 2α கோணத்தில் அவை சாய்ந்திருக்கும் போது பெறப்பட்ட விளையுளின் அளவில் இரு மடங்காக இருந்தால், $\cos\theta = 2\cos\alpha$ எனக் காட்டுக.

4. $ABCD$ என்பது ஒரு சதுரம். E மற்றும் F என்பன முறையே BC மற்றும் CD இன் நடுப்புள்ளிகள் ஆகும். $5, 2\sqrt{5}, 5\sqrt{2}, 4\sqrt{5}, 1$ நியூட்டன் விசைகள் A இல் முறையே AB, AE, CA, AF, AD உடன் எழுத்துக்களின் வரிசையால் சுட்டிக்காட்டப்பட்ட திசைகளில் தாக்குகின்றன. விளையுளைக் காண்க.

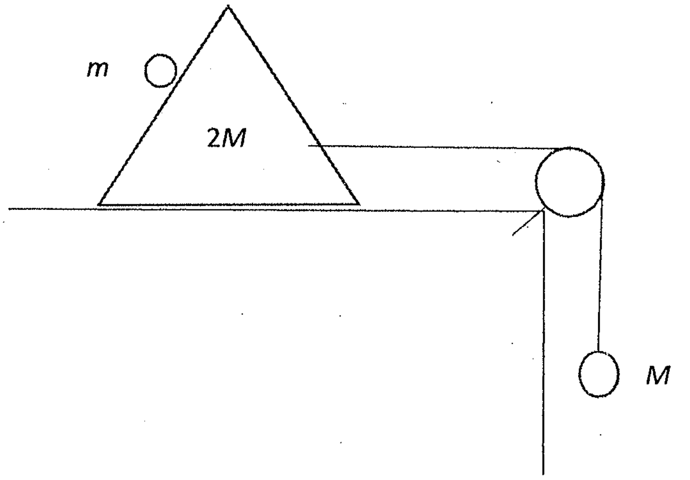
5. ஆரை a மற்றும் நிறை W உடைய ஒரு கோளம், கோளத்தின் மேற்பரப்பில் உள்ள ஒரு புள்ளியுடன் ஒரு முனை இணைக்கப்பட்ட l நீளமுடைய ஒரு இழையின் ஆதரவில் ஒரு ஒப்பமான் சாய்தளத்தின் மீது ஓய்விலுள்ளது மற்றும் இழையின் மற்றைய முனை தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் கட்டப்பட்டுள்ளது. கிடைமட்டத்துடன் தளத்தின் சாய்வு α எனின், இழையில் உள்ள இழுவை $\frac{W(a+l)\sin\alpha}{\sqrt{2al+l^2}}$ என நிறுவுக.

6. ஒரு மோட்டார் கார் d தூரம் பயணிக்க T நேரம் எடுக்கிறது. இந்த பயணத்தில், மோட்டார் கார் ஓய்வில் இருந்து ஆரம்பித்து, a_1 ஆர்முடுகளுடன் ஒரு அதியுயர் வேகம் V ஐ அடைகிறது மற்றும் பின்னர் a_2 அமர்முடுகலின் கீழ் ஓய்வுக்கு வருகிறது.
$T = \sqrt{\frac{2d(a_1+a_2)}{a_1 a_2}}$ மற்றும் $V = \sqrt{\frac{2d a_1 a_2}{a_1+a_2}}$ எனக் காட்டுக.

7. $120m$ செங்குத்தாக மேலே ஒரு புள்ளியில் உள்ள ஒரு அவதானி, ஒரு உடல் மேல் நோக்கி அவரை கடந்து செல்வதையும் மற்றும் மீண்டும் ஐந்து செக்கன்களில் கீழ் நோக்கி அவரை கடந்து செல்வதையும் அவதானிக்கிறார். உடல் தரை மட்டத்தில் ஏவப்பட்டு இருந்தால், அதன் ஏவப்பட்ட வேகத்தைக் காண்க.

8. ஒரு புள்ளி O சார்பாக ஒரு எறிபடையின் பாதை மீது ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் (x, y) ஆகும். R என்பது கிடைமட்ட வீச்சு எனின், எறியக் கோணம் θ; $\tan\theta = \frac{Ry}{x(R-x)}$ என்பதால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

9. படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளபடி, ஒரு ஒப்பமான கப்பி வழியாக செல்லும் ஒரு இழையில் இருந்து செங்குத்தாக ஒரு நிறை M தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது, ஒரு ஒப்பமான கிடைமட்ட மேசையில் கிடைமட்டமாக $2M$ நிறையுடைய ஒரு ஆப்பு இழுக்கிறது. கிடைமட்டத்துடன் 45° சாய்ந்த முகத்தில் ஒரு நிறை m வைக்கப்பட்டுள்ளது. அனைத்து இயக்கங்களும் மிகப்பெரிய சாய்வுக் கோட்டுடன் ஒரு செங்குத்துத் தளத்தில் இடம்பெறுகின்றன. ஆப்பு சார்பாக m இன் ஆர்முடுகல் $\frac{\sqrt{2}g(4M+m)}{(6M+m)}$ எனக் காட்டுக.



10. u வேகத்தில் வடக்கை நோக்கி கடற்பயணம் செய்யும் ஒரு கப்பல் சார்பாக ஒரு எதிரிக் கப்பலின் இயக்கத்தின் திசை வடக்கிலிருந்து 45^0 கிழக்கே உள்ளது. அதே வேகத்தில் தெற்கு நோக்கி பயணிக்கும் மற்றொரு கப்பலுக்கு எதிரிக் கப்பல் வடக்கிலிருந்து 30^0 கிழக்கே கடற்பயணம் செய்வது போல் தெரிகிறது. எதிரிக் கப்பல் கடற்பயணம் செய்யும் உண்மையான திசை வடக்கிலிருந்து θ கிழக்காக இருக்கும் எனின், $\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}-1)$ எனக் காட்டுக.

பகுதி B

11. (a) $OABC$ என்பது ஒரு இணைகரம். D என்பது AB இன் நடுப்புள்ளி. OD மற்றும் AC ஆகியவை E இல் இடைவெட்டுகின்றன. $\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{OB} = \underline{b}, OE : ED = \lambda : 1$ மற்றும் $CE : EA = \mu : 1$ ஆகும்.

(i). $\underline{a}$ மற்றும் $\underline{b}$ இன் சார்பில் $\overrightarrow{OD}$ ஐக் காண்க. இதிலிருந்து காவி $\overrightarrow{OE}$ ஐ λ, $\underline{a}$ மற்றும் $\underline{b}$ இன் சார்பில் எழுதுக.

(ii). காவி $\overrightarrow{AC}$ ஐக் காண்க மற்றும் காவி $\overrightarrow{OE}$ ஐ μ, $\underline{a}$ மற்றும் $\underline{b}$ இன் சார்பில் எழுதுக.

(iii). மேலே (i) மற்றும் (ii) இல் பெறப்பட்ட முடிவுகளைப் பயன்படுத்தி λ மற்றும் μ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(iv). OD மற்றும் CB இன் உற்பத்தியானது H இல் சந்திக்கும் போது, $\overrightarrow{OH}$ ஐக் காண்க.

(b) $\underline{a} = \underline{i} + \sqrt{3}\,\underline{j}$ இங்கு $\underline{i}$ மற்றும் $\underline{j}$ வழமையான அர்த்தம் கொண்டது. $\underline{b}$ என்பது $\sqrt{3}$ அளவுடைய ஒரு காவி ஆகும். காவிகள் $\underline{a}$ மற்றும் $\underline{b}$ இற்கு இடையேயான கோணம் $\frac{\pi}{3}$ எனின், $\underline{b}$ ஐ $x\underline{i} + y\underline{j}$ வடிவில் காண்க, இங்கு $x(< 0)$ மற்றும் y ஆகியவை தீர்மானிக்கப்பட வேண்டிய மாறிலிகள்.

12. $2a$ மீட்டர் பக்கமுடைய ஒரு ஒழுங்கான அறுகோணி $ABCDEF$ இல் $P, Q, R, P, 2P, 3P$ N ஆகிய விசைகள் முறையே AB, BC, CD, DE, EF, FA பக்கங்களில் தொழிற்படுகின்றன, அறுகோணியின் பக்கங்கள் எழுத்துக்களின் ஒழுங்கில் குறிக்கப்படுகிறது.

(a). தொகுதி ஒரு இணைக்கு சமமானதாக இருந்தால், $Q = 2P$ மற்றும் $R = 3P$ எனக் காட்டுக மற்றும் இணையின் திருப்பத்தைக் காண்க.

(b). AD ஊடான ஒரு ஒற்றை விசைக்கு தொகுதி சமமாக இருந்தால், P இன் சார்பில் Q மற்றும் R ஐக் காண்க.

13. (a) W நிறையுடைய ஒரு கோலின் ஈர்ப்பு மையம் அதன் நீளத்தை $2:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது, இது ஒரு ஒப்பமான வெற்றுக் கோளத்தின் உள்ளே சமநிலையில் உள்ளது. கோல் கோளத்தின் மையத்தில் 2α கோணத்தை எதிரமைத்து மற்றும் கிடைமட்டத்துடன் θ கோணத்தை ஆக்கினால், $\tan\theta = \frac{1}{3}\tan\alpha$ என நிறுவுக. W மற்றும் α வின் சார்பில் கோலின் முனையில் உள்ள மறுதாக்கங்களையும் காண்க.

(b) W நிறையுடைய ஒரு சீரான ஏணி ஒரு ஒப்பமான செங்குத்துச் சுவருக்கு எதிராக ஒரு கரடான கிடைமட்ட தரை மீது ஓய்விலுள்ளது. ஏணியைக் கொண்டிருக்கும் செங்குத்துத் தளம் சுவருக்கு செங்குத்தாக உள்ளது மற்றும் ஏணி செங்குத்துடன் α கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளது. ஏணி நழுவும் தருவாயிலும் மற்றும் ஏணிக்கும் தரைக்கும் இடையே உராய்வுக் குணகம் μ ஆகவும் இருப்பின் $\tan\alpha = 2\mu$ எனக் காட்டுக.

14. தரையில் ஓய்வில் இருக்கும் ஒரு பலூன் ஒரு சீரான ஆர்முடுகல் $\frac{g}{8}\, ms^{-2}$ உடன் செங்குத்தாக உயரத் தொடங்குகிறது. ஆரம்பத்தில் இருந்து t நேரத்தின் பின்னர், பலூனில் இருந்து ஒரு உடல் விடுவிக்கப்பட்டது. அதன் விளைவாக, பலூனின் ஆர்முடுகல் $\frac{g}{4}\, ms^{-2}$ ஆக அதிகரிக்கிறது. மற்றொரு நேரம் $\frac{t}{4}$ இற்கு பின்னர், பலூன் வெடித்து ஈர்ப்பு விசையின் கீழ் சுதந்திரமாக விழத் தொடங்குகிறது. ஒரே அச்சுகளைப் பயன்படுத்தி, பலூன் மற்றும் உடலுக்கு வேக−நேர வரைபை வரைக. இந்த வரைபை பயன்படுத்தி,

(i) உடல் விடுவிக்கப்பட்ட போது பலூன் பயணித்துள்ள தூரம்,
(ii) அதிகபட்ச உயரத்தை அடைய உடல் எடுக்கும் நேரம்,
(iii) அதிகபட்ச உயரத்தை அடைய பலூன் எடுக்கும் நேரம்,
(iv) பலூன் மற்றும் உடல் சமமான வேகங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் மற்றும் அந்த வேகம்,

என்பவற்றைக் காண்க.

15. u வேகத்துடன், கிடைமட்டத்துடன் θ கோணம் சாய்வாக எறியப்பட்ட ஒரு உடல், d கிடைமட்ட தூரத்திலுள்ள h உயரமுள்ள ஒரு சுவரின் மேல் செல்கிறது. அது சுவருக்கு மேலே எவ்வளவு உயரத்தால் செல்கிறது எனக் காண்க. உடல் சுவருக்கு சற்று மேலே செல்லுமாயின், $u^2 = \frac{gd^2}{2(d\,tan\theta - h)cos^2\theta}$ எனக் காட்டுக.

H என்பது உடல் அடையும் அதிகபட்ச உயரம் எனின், $H = \frac{d^2 \tan^2\theta}{4(d\tan\theta - h)}$ எனக் காட்டுக.

R என்பது உடலின் வீச்சு எனின் $R = \frac{dh}{d\tan\theta - h}$ எனவும் காட்டுக.

16. இரண்டு நேரான சாலைகள் OA மற்றும் OB ஒரு கூர்ங்கோணத்தில் சந்திக்கின்றன. ஒரு கார் P ஆனது OA ஊடாக O ஐ நோக்கி சீரான வேகம் u உடன் நகர்கிறது, அதே சமயம் இரண்டாவது கார் Q ஆனது OB ஊடாக O ஐ விலகி சீரான வேகம் v உடன் நகர்கிறது. $t = 0$ இல், கார் P ஆனது O இலிருந்து a தூரத்தில் உள்ளது மற்றும் கார் Q ஆனது O வில் உள்ளது. Q சார்பாக P இன் வேகத்தைக் காண்க.

(i) கார்களுக்கு இடையே உள்ள மிகக் குறைந்த தூரம் $\frac{av\sin\alpha}{\sqrt{u^2+v^2+2uv\cos\alpha}}$ எனக் காட்டுக மற்றும் குறைந்த தூரத்தை அடைய எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

(ii) அவை மிகக் குறைந்த தூரத்தில் இருக்கும் போது O விலிருந்து தூரங்களின் விகிதம் $v + u\cos\alpha : u + v\cos\alpha$ எனக் காட்டுக.

17. (a) W நிறையுடைய ஒரு காரின் அதிகபட்ச சக்தி H. அனைத்து சூழ்நிலைகளிலும் உராய்வு காரணமாக ஒரு நிலையான தடை R உள்ளது. கார் $\sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ உடைய ஒரு சாய்வின் மேல் நோக்கி நகரும் போது, அதன் அதிகபட்ச வேகம் V ஆகும் மற்றும் அதே சாய்வில் கீழ் நோக்கி நகரும் போது அதன் அதிகபட்ச வேகம் $2V$ ஆகும். மட்டமான சாலையில் காரின் அதிகபட்ச வேகம் U ஆகும். தரப்பட்ட சாய்வில் $\frac{U}{2}$ வேகத்துடன் கார் மேல் நோக்கி நகரும் போது அதன் அதிகபட்ச ஆர்முடுகலைக் காண்க.

(b) முறையே $5kg$ மற்றும் $3kg$ நிறையுடைய இரண்டு துணிக்கைகள் A மற்றும் B ஆகியவை ஒரு இலேசான நீட்டமுடியா இழையினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விழை ஒரு இலேசான, ஒப்பமான, நகரக்கூடிய கப்பிக்கு அடியில் செல்கிறது மற்றும் $2kg$ உடைய ஒரு எடையைத் தாங்குகிறது மற்றும் துணிக்கைகள் A மற்றும் B இரண்டு கரடான கிடைமட்டத் தளங்களில் ஓய்விலுள்ளன. இரண்டு துணிக்கைகளுக்குமான உராய்வுக் குணகம் 0.1 ஆகும். A மற்றும் B இன் ஆர்முடுகல் மற்றும் இழையிலுள்ள இழுவை ஆகியவற்றைக் காண்க.