ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යා උසස් සහතික පත්‍ර පාඨමාලාව
ගණිත අංශය
MYF2521/MHF2521 - සංයුක්ත ගණිතය III
දෙවන මට්ටම අවසන් පරීක්ෂණය 2021/22

දිනය : - 2022.09.17 | **වේලාව : - පෙ.ව. 9.30 සිට ප.ව. 12.30 දක්වා**

A කොටසේ සියලුම ප්‍රශ්නවලට සහ **B** කොටසේ ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

A කොටස

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් සියලුම ධන නිඛිල n සඳහා,

   $\sum_{r=1}^{n}(2r+1) = n(n+2)$ බව පෙන්වන්න.

2. $\frac{1}{2}|x-1| > |x-4|$ අසමානතවය තෘප්ත කරන x හි තාත්වික සංඛ්‍යා කුලකය ලියා දක්වන්න.

3. එක් ඉලක්කමක් එක් වරක් පමණක් භාවිතා කරමින් 1, 2, 3, 4 සහ 5 යන ඉලක්කම් වලින්, ඉලක්කම් පහක් සහිත එකිනෙකට වෙනස් සංඛ්‍යා කොපමන සෑදිය හැකිද?

   එම සංඛ්‍යා අතරින්,
   (i) ඉරට්ටේ සංඛ්‍යා කීයක් පවතීද?

   (ii) 3 සහ 4 එකලග පවතින අවස්ථා කොපමණද?

4. ද්විපද ප්‍රසාරනය පිළිබඳ දැනුම භාවිතා කරමින් සියලුම ධන නිඛිල දර්ශක සඳහා,

   $\left(1+\sqrt{3}\right)^6 + \left(1-\sqrt{3}\right)^6 = 416$ බව පෙන්වන්න.

   එනයින්,
   $\left(1+\sqrt{3}\right)^6$ ප්‍රසාරණය සඳහා වන පූර්ණ සංඛ්‍යාත්මක කොටස ලියා දක්වන්න.

5. පහත සඳහන් සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නියෝජනය කරන ලක්ෂ වල පිහිටීම එකම ආර්ගන්ඩ් තලයක ලකුනු කරන්න.

   (i) $|z-i| = 1$

   (ii) $Arg(z-i) = \frac{\pi}{6}$,

මෙම සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය $r(cos\theta + isin\theta),\ r > 0,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ආකාරයෙන් දක්වන්න.

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ නම් $A^2 - 3A = -I$ බව පෙන්වන්න. එනයින් A^{-1} සොයන්න.

7. පහත සීමා අගයන්න.

(a) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^4 - 81}{x^3 + 27}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin3x}{sin2x}$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^4 - 1}{3x^4 + x^2 + 1}$

8. අවකලනය පිළිබඳ ප්‍රථම මූලධර්මය භාවිතා කරමින් $y = ax^2 + bx + c$ ප්‍රකාශනය අවකලනය කරන්න.

y මගින් අර්ථ දක්වා ඇති වක්‍රය $(0,\ 1)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරන බව සහ $\left(-\frac{1}{4},\ \frac{7}{8}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේදී අනුක්‍රමණය 0 බව සලකන්න. එමගින් a, b සහ c හි අගයන් සොයන්න.

9. $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ වන θ හි පරාසය සඳහා C වක්‍රයේ පරාමිතික සමීකරණය $x = 3\sin^2(\theta/2)$ සහ $y = \sin^3\theta$ වේ. $\frac{dy}{dx} = \sin 2\theta$ බව පෙන්වන්න.

C වක්‍රය මත P ලක්ෂ්‍යයේදී ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමනය $\frac{\sqrt{3}}{2}$ නම්, P ලක්ෂ්‍යයේදී θ හි අගය සොයන්න.

10. සෘජුකෝණාස්‍රාකාර කාටීසියානු තලය මත $y = x^2$ සහ $y = 2x - x^2$ වක්‍ර වලින් වට වූ කොටසේ වගර්ඵලය සොයන්න.

B කොටස

11. (a) $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots$ ශ්‍රේණියේ n වන පදය ලියා දක්වන්න.

$f(r) = \frac{1}{r^2}$ නම්, $f(r) - f(r+1)$ සඳහා වන ප්‍රකාශනය ව්‍යුත්පන්න කරන්න.

එනයින්,

$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots$ ශ්‍රේණියේ පළමු n පද ගණනේ එකතුව සොයන්න.

තවද, මෙම ශ්‍රේණියේ පද අනන්තයක එකතුව සොයා එය අභිසාරී දැයි දක්වන්න.

(b) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$ සහ $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්, $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^4$ හි අගය සොයන්න.

12. (a) z_1=2+2i සහ $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් රූප සටහනේ A සහ B යන ලක්ෂායන් වලින් නිරූපණය කෙරේ. O යනු මූල ලක්ෂාය වේ.

(i) z_1 සහ z_2 ආගන්ඩ් රූප සටහනක දක්වන්න.

(ii) OA, OB සහ AB හි දිග සොයන්න.

(iii) OAB කිනම් වර්ගයේ ත්‍රිකෝණයක්ද?

(iv) $OABC$ යනු සෘජුකෝණාස්‍රයක් නම්, C මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව කුමක්ද?

(b) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ නම්, n හි සියලුම ධන අගයන් සඳහා,

$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$ සහ $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්,

$32cos^6\theta = \cos 6\theta + 6cos4\theta + 15cos2\theta + 10$ සහ
$32sin^6\theta = -\cos 6\theta + 6cos4\theta - 15cos2\theta + 10$ බව පෙන්වන්න.

13. පහත ප්‍රකාශන x විෂයෙන් අවකලනය කරන්න.

(a) $y = (x^2+1)(3x^2-7)$

(b) $y = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

(c) $y = \sin^2 x + \tan^2 x$

(d) $y = x^{3x}$

14. (a) $y = \frac{x-2}{(x-1)(x+2)}$ වක්‍රයේ හැරුම් (වර්තන) ලක්ෂායන් සොයන්න. එම ලක්ෂායන් උපරිම, අවම හෝ නතිවර්තන ද යන වග පුරෝකථනය කරන්න

එනයින්,
දී ඇති වක්‍රයට අදාළ ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් ඇද දක්වන්න.

(b) සිලින්ඩරයක්, උස h සහ අරය r වන කේතුවක් තුළට සිලින්ඩරයේ සහ කේතුවේ අක්ෂ සමපාත වන පරිදි බහාලිය හැකි නම්, එවැනි සිලින්ඩරයක උපරිම පරිමාව $\frac{4}{27}\pi r^2 h$ බව පෙන්වන්න.

15. (a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx$ සහ $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx$ නම් සුදුසු ආදේශයක් යොදා ගනිමින් $I = J$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx$ අගය සොයන්න.

(b) පහත අනුකලනයන්හි අගය සොයන්න.

(i) $\int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} dx$

(ii) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$

(iii) $\int x e^x dx$

16. (a) $y^2 = 4ax$ වක්‍රය $0 \le x \le a$ පරාසය තුළ x අක්ෂය වටා සෘජුකෝණ හතරකින් භ්‍රමණය වනවිට ලැබෙන පරිමාව සොයන්න.

(b) A යනු $A^{-1} = -A$ වන පරිදි පවතින න්‍යාසයක් නම්,

(i) $A^2 = -I$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $A^4 + A^3 + A^2 + A + A^{-1} = kA$ වන පරිදි k හි අගය සොයන්න.

(iii) $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ 2 & -a \end{pmatrix}$ සහ $A^{-1} = -A$, නම් a හි අගය සොයන්න.

17. $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ සහ $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ යන වෘත්ත එකිනෙකට ලම්බකව ඡේදනය වේ නම් $2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$ බව පෙන්වන්න.

$x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ සහ $x^2 + y^2 - 2x - 10y - 4 = 0$ යන වෘත්ත එකිනෙකට ලම්බකව ඡේදනය කරන සහ මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.