இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்

கணிதத் திணைக்களம்

விஞ்ஞானத்தில் உயர்சான்றிதழ்

MYF2519/MHF2519 – இணைந்த கணிதம் I

மட்டம் 02 இறுதிப் பரீட்சை 2021/2022

திகதி:- 24-09-2022 நேரம்:- மு.ப 09.30 இலிருந்து பி.ப 12.30 வரை

பகுதி **A** இல் **அனைத்து** வினாக்களுக்கும் மற்றும் பகுதி **B** இல் **ஐந்து** வினாக்களுக்கும் விடையளிக்குக.

பகுதி A

1. (a) சார்பு $y = \frac{2x}{x^2-4}, x \neq \pm 2$ இன் ஆட்சி, வீச்சு மற்றும் துணை ஆட்சி என்பவற்றைக் காண்க.

   (b) மேலுள்ள சார்பின் வரைபை வரைக.

2. (a) சார்புகள் $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன $f: x \to x^2$ மற்றும் $g: x \to x - 1$ இனால் வரையறுக்கப்படுகின்றன. பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

   (i) $f \circ g(x)$
   (ii) $g \circ f(x)$

   (b) சார்புகள் $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன $f: x \to e^{2x}$ மற்றும் $g: x \to x + 1$ இனால் வரையறுக்கப்படுகின்றன.

   (i) $f^{-1}(3) \times g^{-1}(3)$ இனைக் கணிக்க.
   (ii) $(f \circ g)^{-1}(3) = \ln\sqrt{3} - 1$ எனக் காட்டுக.

3. $ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனின், $\frac{1}{\alpha}$ மற்றும் $\frac{1}{\beta}$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு $\alpha, \beta \neq 0$ ஆகும்.

4. $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x$ என நிறுவுக. **இதிலிருந்து** $\log_a x + \log_{a^2} x^2 + \log_{a^3} x^3 + \cdots + \log_{a^{2022}} x^{2022} = \log_a x^{2022}$ எனக் காட்டுக.

5. $4x + 3y + 1 = 0$ என்னும் கோட்டிற்கு செங்குத்தாகவும், புள்ளி $(-1,3)$ இற்கு ஊடாகவும் செல்லும் நேர் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

6. சமன்பாடு $3^{2x} + 3^x - 12 = 0$ இனைத் தீர்க்க.

7. $(x-1)$ ஆனது x^3-2x^2-x+2 இன் ஒரு காரணி எனக் காட்டுக. **இதிலிருந்து** x^3-2x^2-x+2 இன் மற்றைய காரணிகளைக் காண்க.

8. $p, q > 1$ எனின், சமன்பாடு $(x-1)(2x-p-q)+(x-p)(x-q)=0$ இன் மூலங்கள் மெய்யானவை மற்றும் வேறுபட்டவை எனக் காட்டுக.

9. (a) $\tan(x+y)=33$ மற்றும் $\tan x = 3$ எனின் $\tan y = 0.3$ எனக் காட்டுக.

   (b) $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=t$ எனின் $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ மற்றும் $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ எனக் காட்டுக. **இதிலிருந்து** சமன்பாடு $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta = 1$ ஐத் தீர்க்க.

10. இருபடிச் சமன்பாடு $x^2-px+q=0$ இன் மூலங்கள் $\tan A$ மற்றும் $\tan B$ எனின் $\sin^2(A+B)$ இனைக் காண்க.

பகுதி B

11. (a) x^2+px+1 என்பது ax^3+bx+c இன் ஒரு காரணி எனின் $a^2-c^2=ab$ எனக் காட்டுக.

    (b) $(x+2)$ என்பது $(x+1)^7+(2x+k)^3$ இன் ஒரு காரணி எனின் k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

    (c) முப்படிக் கோவை ax^3+bx+c ஐ $(x+2), (x-1)$ மற்றும் $(x-2)$ என்பவற்றினால் வகுக்கும் போது மீதிகள் முறையே $4, 0$ மற்றும் 4 ஆகும். a, b மற்றும் c இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

12. (a) சமன்பாடு $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$ இன் மூலங்கள் நேரானவை எனின் a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

    (b) இருபடிச் சமன்பாடு $ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் α மற்றும் β ஆகும். சமன்பாடு $a^3x^2+abcx+c^3=0$ இன் மூலங்களை α மற்றும் β வின் சார்பில் காண்க.

    (c) சமன்பாடு $x^2-p(x+1)x-c=0$ இன் மூலங்கள் α மற்றும் β ஆகும்.

    $(\alpha+1)(\beta+1)=1-c$ எனக் காட்டுக.

    இதிலிருந்து $\frac{\alpha^2+2\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+c}+\frac{\beta^2+2\beta+1}{\beta^2+2\beta+c}=1$ எனக் காட்டுக.

13. (a) $y = \tan x, 0 \leq x \leq \pi$ இன் வரைபை வரைக. அதே வரைபில் $y = \pi - x$ என்னும் கோட்டின் வரைபை வரைக.

(b) $x + \tan x = \pi$ என்னும் சமன்பாட்டைக் கருதுக. ஆயிடை $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ வில் தரப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு x_0 இனால் குறிக்கப்படுகிறது.

(i) சமன்பாட்டின் மீதமுள்ள தீர்வுகளை ஆயிடை $[0, 2\pi]$ இல், x_0 மற்றும் π இன் சார்பில் காண்க.

(ii) $x + \tan x = \pi$ என்னும் சமன்பாடு $x \in \mathbb{R}$ இற்கு எத்தனை தீர்வுகளைக் கொண்டுள்ளது?

(c) $\cos A = c$ மற்றும் $\sin A = s$ இனால் தரப்பட்டுள்ளது.

(i) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$ மற்றும் $\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$ இன் பெறுமானங்களை எழுதுக. **இதிலிருந்து** $\tan\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \frac{1}{\tan A}$ எனக் காட்டுக.

(ii) $\tan A + \tan\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}$ எனத் தரப்படின், A இற்குச் சாத்தியமான பெறுமானங்களைக் காண்க.

(iii) **இதிலிருந்து** பகுதி (ii) இல் தரப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை திருப்தி செய்யும் $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

14. ஒரு முக்கோணி ABC இற்கு வழக்கமான குறியீட்டுடன்,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$ எனக் காட்டுக.

(a) $b \sin\left(\frac{B}{2} + C\right) = (c + a) \sin\frac{B}{2}$

(b) $\frac{\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}}{\cot\frac{B}{2}} = \frac{2b}{a + c - b}$

(c) $(b^2 - c^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C = 0$, என நிறுவுக.

15. (a) பின்வரும் சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வைக் காண்க.

(i) $\cos 3\theta + \cos\theta = \sin 2\theta$

(ii) $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}$

(b) நேர்மாறு சார்பு தலைமைப் பெறுமானங்களை எடுத்துக் கொண்டால்

$\tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{4}{3} = \frac{\pi}{2}$ என நிறுவுக.

(c) $y = 11\cos^2 x + 16\sin x\cos x - \sin^2 x$ என்னும் கோவையின் உயர்வு மற்றும் இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

16. (a) $P \equiv (x_1, y_1)$ மற்றும் $Q \equiv (x_2, y_2)$ என்க, PQ வின் நீளம் $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ இனால் தரப்படும் என நிறுவுக.

இதிலிருந்து $p > q$ என ஆகுமாறு புள்ளிகள் $A \equiv (ap^2, 4ap)$ மற்றும் $B \equiv (aq^2, 4aq)$ தரப்படின், $AB = a(p - q)\sqrt{(p + q)^2 + 16}$ எனக் காட்டுக.

(b) $P \equiv (1, -2), Q \equiv (2,3), R \equiv (-3,2)$ மற்றும் $S \equiv (-4, -3)$ என்க, PQ, QR, RS மற்றும் SP ஆகியவற்றின் படித்திறன்களைக் காண்க. மேலும் PR மற்றும் QS இன் நீளங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து $PQRS$ ஒரு சாய்சதுரம் எனக் காட்டுக.

(c) முக்கோணி ABC இன் உச்சிகளின் ஆள்கூறுகள் $A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ மற்றும் $C \equiv (x_3, y_3)$ ஆல் தரப்படுகின்றன. முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு $\frac{1}{2}\{(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\}$ இனால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $A \equiv (0,2)$, $B \equiv (4,3)$, $C \equiv (1,5)$ மற்றும் $D \equiv (-1, -2)$ ஐ உச்சிகளாக உடைய நாற்பக்கல் $ABCD$ இன் பரப்பளவைக் காண்க.

17. (a) புள்ளி $C \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ ஆனது $A \equiv (x_1, y_1)$ மற்றும் $B \equiv (x_2, y_2)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை உட்புறமாக $m : n$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

$\bar{x} = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m}$ மற்றும் $\bar{y} = \frac{ny_1 + my_2}{n+m}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, AB இன் நடுப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ஆல் தரப்படுகின்றன என்பதை நியாயப்படுத்துக.

(b) ஒரு சதுரத்தின் மையம் மற்றும் உச்சியின் ஆள்கூறுகள் முறையே $(2, -1)$ மற்றும் $(-1,1)$ ஆகும். அதன் மற்ற உச்சிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.