ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යා උසස් සහතික පත්‍ර පාඨමාලාව
ගණිත අංශය
MYF2519/MHF2519 - සංයුක්ත ගණිතය
දෙවන මට්ටම අවසන් පරීක්ෂණය 2021/22

දිනය : - 2022.09.24 **වේලාව : - පෙ.ව. 9.30 සිට ප.ව. 12.30 දක්වා**

A කොටසේ සියලුම ප්‍රශ්නවලට සහ **B** කොටසේ ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

A කොටස

1. (a) පහත දී ඇති ශ්‍රිතයේ වසම, සහවසම සහ පරාසය සොයන්න.

$$y = \frac{2x}{x^2-4}, x \neq \pm 2$$

(b) ඉහත ශ්‍රිතයේ දළ සටහන අඳින්න.

2. (a) $f(x)$ ශ්‍රිතය සහ $g(x)$ ශ්‍රිතය $f: x \to x^2$ සහ $g: x \to x-1$ මගින් දක්වනු ලැබේ.

(i) $f \circ g(x)$
(ii) $g \circ f(x)$ සොයන්න.

(b) $f(x)$ ශ්‍රිතය සහ $g(x)$ ශ්‍රිතය $f: x \to e^{2x}$ සහ $g: x \to x+1$ මගින් දක්වනු ලැබේ.

(i) $f^{-1}(3) \times g^{-1}(3)$ ගණනය කරන්න.
(ii) $(f \circ g)^{-1}(3) = ln\sqrt{3} - 1$ බව පෙන්වන්න.

3. $ax^2 + bx + c = 0$ යන සමීකරණයේ මූල α සහ β නම්, $\frac{1}{\alpha}$ සහ $\frac{1}{\beta}$ මූල වන වගර්ජ සමීකරණය සොයන්න. $\alpha, \beta \neq 0$ බව සලකන්න.

4. $log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} log_a x$ බව සාධනය කරන්න.

එනයින්,
$log_a x + log_{a^2} x^2 + log_{a^3} x^3 + \cdots + log_{a^{2022}} x^{2022} = log_a x^{2022}$ බව පෙන්වන්න.

5. $4x + 3y + 1 = 0$ යන සරල රේඛාවට ලම්බක වන සහ $(-1, 3)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

6. $3^{2x} + 3^x - 12 = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

7. $(x-1)$ යන්න x^3-2x^2-x+2 ශ්‍රිතයේ සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

එනයින්,
x^3-2x^2-x+2 හි ඉතිරි සාධක සියල්ල සොයන්න.

8. $p,q>1$ නම්, $(x-1)(2x-p-q)+(x-p)(x-q)=0$ සමීකරණයට එකිනෙකට අසමාන තාත්වික මූල ඇති බව පෙන්වන්න.

9. (a) $\tan(x+y)=33$ සහ $\tan x=3$ නම්, $\tan y=0.3$ බව පෙන්වන්න.

(b) $\tan(\theta/2)=t$ නම්, $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$ සහ $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්,
$\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=1$ සමීකරණයට අදාළ විසඳුම් සොයන්න.

10. $x^2-px+q=0$ සමීකරණයේ මූල $\tan A$ සහ $\tan B$ නම්, $\sin^2(A+B)$ සොයන්න.

B කොටස

11. (a) x^2+px+1 යන්න ax^3+bx+c ශ්‍රිතයේ සාධකයක් නම්, $a^2-c^2=ab$ බව පෙන්වන්න.

(b) $x+2$ යන්න $(x+1)^7+(2x+k)^3$ සමීකරණයේ සාධකයක් නම් k හි අගය සොයන්න.

(c) ax^3+bx+c ඝනජ ප්‍රකාශනය $x+1, x-1$ සහ $x-2$ යන ඒවායින් බෙදූ විට ශේෂයන් පිළිවෙලින් 4, 0 සහ 4 නම් a, b සහ c හි අගයන් ගණනය කරන්න.

12. (a) $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$ සමීකරණයේ මූල ධන නම්, a හි අගය සොයන්න.

(b) $ax^2+bx+c=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල α සහ β නම්, α සහ β ආශ්‍රයෙන්

$a^3x^2+abcx+c^3=0$ සමීකරණයේ මූල සොයන්න.

(c) $x^2-p(x+1)x-c=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල α සහ β නම්,

$(\alpha+1)(\beta+1)=1-c$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්, $\frac{\alpha^2+2\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+c}+\frac{\beta^2+2\beta+1}{\beta^2+2\beta+c}=1$ බව පෙන්වන්න.

13. (a) $y = \tan x, 0 \leq x \leq 2\pi$ ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහන අඳින්න. තවද, $y = \pi - x$ රේඛාවේ ප්‍රස්ථාරය එම තලය මතම ඇඳ දක්වන්න.

(b) $x + \tan x = \pi$ සමීකරණය සලකන්න. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ යන අගය පරාසය තුළ මෙම සමීකරණයේ විසඳුම් x_0 ලෙස ගන්න.

(i) $[0, 2\pi]$ අගය පරාසය තුළ, දී ඇති සමීකරණයේ ඉතිරි විසඳුම් x_0 සහ π ආශ්‍රයෙන් සොයා දක්වන්න.

(ii) සියලුම තාත්වික x අගයන් සඳහා $x + \tan x = \pi$ යන සමීකරණයට විසඳුම් කීයක් පවතීද?

(c) $\cos A = c$ සහ $\sin A = s$ ලෙස දී ඇත.

(i) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$ සහ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$ හි අගයන් ලියා දක්වන්න.
එනයින්,
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \frac{1}{\tan A}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\tan A + \tan\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}$ බව දී ඇති නම්, A සඳහා පැවතිය හැකි අගයන් ගණනය කරන්න.

(iii) **එමගින්**, (ii) කොටසේ දී ඇති සමීකරණය තෘප්ත කරන $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ පරාසය තුළ ඇති A හි අගයන් සොයන්න.

14. සුපුරුදු අංකනයෙන් ABC ත්‍රිකෝණය සඳහා,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

බව පෙන්වන්න.

(a) $b \sin\left(\frac{B}{2} + C\right) = (c + a) \sin\frac{B}{2}$

(b) $\frac{\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}}{\cot\frac{B}{2}} = \frac{2b}{a+c-b}$

(c) $(b^2 - c^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C = 0$ බව සාධනය කරන්න.

15. (a) පහත සමීකරණ සඳහා සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

(i) $cos3\theta + cos\theta = sin2\theta$
(ii) $\sqrt{3}sin\theta - cos\theta = \sqrt{2}$

(b) ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතයන් ප්‍රධාන අගයන් ගන්නා විට,

$tan^{-1}\frac{3}{4} + tan^{-1}\frac{4}{3} = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න

(c) පහත දී ඇති ප්‍රකාශනයේ උපරිම සහ අවම අගයන් සොයන්න.

$$y = 11\cos^2 x + 16\sin x\cos x - \sin^2 x.$$

16. (a) $P \equiv (x_1, y_1)$ සහ $Q \equiv (x_2, y_2)$ වේ. PQ හි දිග
$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ බව සාධනය කරන්න.

එනයින්,
$p > q$ වන පරිදි $A \equiv (ap^2, 4ap)$ සහ $B \equiv (aq^2, 4aq)$ යනු දෙන ලද ලක්ෂ්‍යයන් නම්,
$AB = a(p-q)\sqrt{(p+q)^2 + 16}$ බව පෙන්වන්න.

(b) $P \equiv (1, -2)$, $Q \equiv (2, 3)$, $R \equiv (-3, 2)$ සහ $S \equiv (-4, -3)$ ලෙස සලකන්න. PQ, QR, RS සහ SP හි අනුක්‍රමණ සොයන්න. තවද, PR සහ QS යන රේඛා වල දිග සොයන්න.

එමගින්, $PQRS$ රොම්බසයක් වන බව පෙන්වන්න.

(c) ABC ත්‍රිකෝණයේ ශීර්ෂ වල ඛණ්ඩාංක $A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ සහ $C \equiv (x_3, y_3)$ ලෙස දී ඇති බව සලකා ABC ත්‍රිකෝණයේ වගර්ඵලය

$\frac{1}{2}\{(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\}$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්,
$A \equiv (0, 2)$, $B \equiv (4, 3)$, $C \equiv (1, 5)$ සහ $D \equiv (-1, -2)$ ශීර්ෂ වන $ABCD$ චතුරස්‍රයේ වගර්ඵලය සොයන්න.

17. (a) $A \equiv (x_1, y_1)$ සහ $B \equiv (x_2, y_2)$ ලක්ෂ්‍යයන් මගින් සම්බන්ධ වන රේඛාව $C \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ ලක්ෂ්‍යය මගින් අභ්‍යන්තරව $m : n$ අනුපාතයට බෙදයි.

$\bar{x} = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m}$ සහ $\bar{y} = \frac{ny_1 + my_2}{n+m}$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්,
AB රේඛාවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ මගින් ලබා දෙන බව පෙන්වන්න.

(b) චතුරස්‍රයක කේන්ද්‍රයේ සහ එක් ශීර්ෂයක ඛණ්ඩාංක පිළිවෙලින් $(2, -1)$ සහ (-1, 1) වේ. අනෙක් ශීර්ෂයන්හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.